

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
«Харьковский политехнический институт»

Любченко Е. А., Ветчинкина З. К., Таврина Т. В.

ОПТИКА. АТОМНАЯ И ЯДЕРНАЯ ФИЗИКА

Учебно-методическое пособие
по курсу «Общая физика»
для студентов всех специальностей и всех форм обучения

Утверждено
редакционно-издательским
советом университета,
протокол № 2 от 25.06.2015 г.

Харьков
НТУ «ХПИ»
2016

УДК 535.31+535.4+535.5+535.14:539.1(07)

ББК 22.3

Л935

Рецензенты:

Е. С. Сыркин, д-р физ.-мат. наук, вед. н.с. ФТИНТ НАНУ

А. Ф. Сук, канд. физ.-мат. наук, проф. каф. ОЭФ НТУ «ХПИ»

Навчально-методичний посібник з курсу «Загальна фізика» містить теоретичний матеріал, методичні вказівки до розв'язання задач з прикладами розв'язаних задач та контрольні задачі з відповідями з розділів «Оптика» та «Атомна та ядерна фізика».

Призначено для студентів усіх спеціальностей та усіх форм навчання.

Любченко Е. А.

Л935 Оптика. Атомная и ядерная физика: Учеб.-метод. пособ. / Е. А. Любченко, З. К. Ветчинкина, Т. В. Таврина. – Харьков: НТУ «ХПИ», 2016. – 300 с. – На рус. яз.

ISBN

Учебно-методическое пособие по курсу «Общая физика» содержит теоретический материал, методические указания к решению задач с примерами решенных задач и контрольные задачи с ответами по разделам «Оптика» и «Атомная и ядерная физика».

Предназначено для студентов всех специальностей и всех форм обучения.

Ил. 125. Табл. 9. Библиогр.: 12 назв.

УДК 535.31+535.4+535.5+535.14:539.1(07)
ББК 22.3

ISBN

© Любченко Е. А., Ветчинкина З. К.,
Таврина Т. В., 2016

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемое учебно-методическое пособие «Оптика. Атомная и ядерная физика» базируется на лекционном курсе, который в течение длительного времени читается на кафедре теоретической и экспериментальной физики НТУ «ХПИ» для студентов различных факультетов и всех форм обучения. Он составлен в соответствии с программой курса «Общая физика», утвержденной Министерством образования и науки Украины, и учебными программами специальностей университета. В пособии представлено систематизированное и доступное изложение основных положений курса общей физики, содержащее как основные элементы теории, так и практические приложения по рассматриваемым темам.

Пособие состоит из десяти глав, каждая из которых содержит теоретическую, практическую и контрольную части. В теоретической части каждой главы представлен материал по соответствующей теме, приведены основные законы, формулы и определения, проиллюстрированные схемами, графиками и рисунками. Практическая часть содержит задачи различной степени сложности с подробным анализом и решениями. Завершает каждую главу подборка контрольных вопросов и задач с ответами. Такая структура пособия позволяет использовать его для изучения материала курса как в дополнение к аудиторным занятиям, так и для самостоятельной работы, не обращаясь при этом к дополнительным источникам информации.

Пособие предназначено для студентов всех специальностей высших технических учебных заведений и широкого круга читателей, изучающих физику самостоятельно.

В рамках подготовки к изданию данного пособия была разработана его электронная версия, которая также доступна студентам для использования.

ОПТИКА

Оптикой называется раздел физики, изучающий свойства и взаимодействие с веществом света. Этот раздел подразделяется на три основные части:

1. геометрическая оптика;
2. волновая оптика;
3. квантовая оптика.

Такое деление связано с тем, что свет имеет сложную природу. В некоторых случаях распространение света можно рассматривать, отвлекаясь от его природы и полагая, что он распространяется вдоль линий, называемых световыми лучами (*геометрическая оптика*).

Если рассматривать явления с точки зрения *волновой оптики*, то необходимо помнить, что свет – это электромагнитные волны, длина которых лежит в пределах от 1 до 10^5 нм, куда включаются ультрафиолетовая (УФ), видимая и инфракрасная (ИК) области спектра.

Видимый свет имеет длину волны $\lambda = 4 \cdot 10^{-7} - 7,6 \cdot 10^{-7}$ м, для УФ-излучения $\lambda < 4 \cdot 10^{-7}$ м, для ИК-излучения $\lambda > 7,6 \cdot 10^{-7}$ м.

В *квантовой оптике* свет рассматривается как поток особых частиц – фотонов.

Глава 1.

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ОПТИКА

I. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Геометрическая оптика – это раздел оптики, изучающий законы распространения света в прозрачных средах, отражения света от зеркально-отражающих поверхностей и принципы построения изображений при прохождении света в оптических системах без учёта его волновых свойств. Основным понятием в геометрической оптике является световой луч – линия, вдоль которой распространяется световая энергия, т. е. это пучок света очень малого поперечного сечения. Далее в волновой оптике будет показано, что световые лучи нормальны к волновым поверхностям.

1. Показатель преломления

Абсолютным показателем преломления (n) называется отношение скорости световой волны (c) в вакууме к скорости света (v) в некоторой среде

$$n = \frac{c}{v}. \quad (1.1)$$

Так как $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$, а $v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0}}$, то

$$n = \frac{c}{v} = \frac{\sqrt{\varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0}}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = \sqrt{\varepsilon \mu} \approx \sqrt{\varepsilon}, \quad (1.2)$$

где ε_0 и μ_0 – электрическая и магнитная постоянные, ε и μ – диэлектрическая и магнитная проницаемости вещества, при этом для большинства веществ $\mu \sim 1$.

Длина световой волны связана со скоростью волны соотношениями: в вакууме $\lambda = c/v$ и в среде $\lambda_{cp} = v/v$. Тогда

$$n = \frac{\lambda}{\lambda_{cp}}. \quad (1.3)$$

2. Законы геометрической оптики. Относительный показатель преломления

1. Закон *прямолинейного распространения света*: в однородной среде свет распространяется прямолинейно;

2. Закон *независимого распространения световых лучей*: лучи при пересечении не возмущают друг друга (принцип суперпозиции волн);

3. Закон *отражения света*: луч падающий и луч отраженный лежат в одной плоскости с перпендикуляром, проведенным в точку падения луча, причем угол падения равен углу отражения (рис. 1.1).

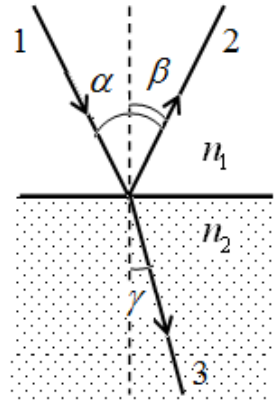


Рисунок 1.1

4. Закон *преломления света (закон Снеллиуса)*: луч падающий и луч отраженный лежат в одной плоскости с перпендикуляром, проведенным в точку падения луча, причем отношение синуса угла падения (α) к синусу угла преломления (γ) есть величина постоянная для данных двух сред и называется **относительным показателем преломления** (n_{21}) второй среды относительно первой.

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} = n_{21} = \frac{n_2}{n_1}, \quad (1.4)$$

где n_1 и n_2 – абсолютные показатели преломления.

Закон преломления называют по имени голландского естествоиспытателя Виллеборда Снелла (в латинском написании Снеллиуса) (1580–1626), который сформулировал его в 1621 году (рис. 1.2, а). Ранее этот закон и другие закономерности оптики исследовал и описал великий арабский ученый, которого называли «отец оптики», Ибн аль-Хайсам (Альхазен) (965–1039) (рис. 1.2, б).



Рисунок 1.2 - а - Снеллиус; б - Альхазен

Из симметрии выражения $n_1 \sin \alpha = n_2 \sin \gamma$ вытекает обратимость световых лучей. Если обратить луч 3, заставив его падать на границу раздела под углом γ , то преломленный луч в первой среде будет распространяться под углом α , т. е. пойдет в обратном направлении вдоль луча 1.

3. Явление полного внутреннего отражения

При переходе светового луча из оптически более плотной среды в оптически менее плотную среду ($n_1 > n_2$) угол преломления оказывается больше угла падения $\gamma > \alpha$.

Увеличение угла падения приводит к увеличению угла преломления до тех пор, пока при некотором угле падения ($\alpha = \alpha_{np}$) угол преломления не окажется равным $\pi/2$.

При дальнейшем увеличении угла падения ($\alpha > \alpha_{np}$) падающий луч будет полностью отражаться границей раздела двух сред. Это явление называется **явлением полного внутреннего отражения**. Угол α_{np} называется **предельным углом полного внутреннего отражения** (рис. 1.3).

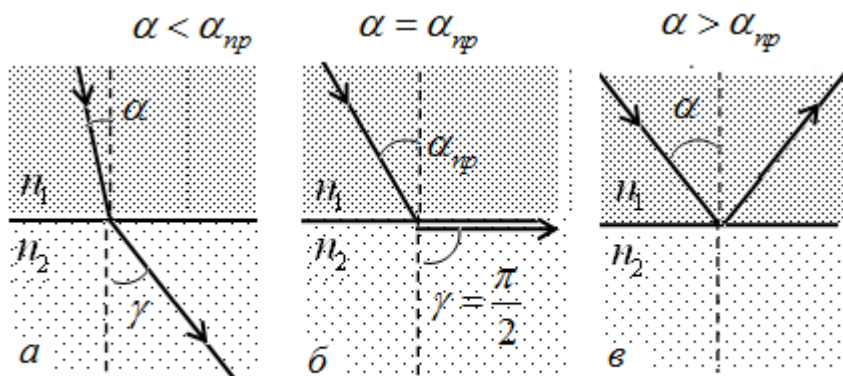


Рисунок 1.3

Значение предельного угла падения найдем из закона преломления, положив $\gamma = \frac{\pi}{2}$, тогда $\sin \gamma = 1$ и

$$\sin \alpha_{np} = \frac{n_2}{n_1} = n_{21}. \quad (1.5)$$

Для воды предельный угол составляет 49° , а для стекла – 42° .

Впервые явление полного внутреннего отражения было описано немецким ученым Иоганном Кеплером (1571–1630) в 1600 году (рис. 1.4).

Явление полного внутреннего отражения используют в поворотной призме перископа, оборотной приме бинокля, в оптических волокнах (свето-



Рисунок 1.4 - Иоганн Кеплер

водах) – тонких кварцевых или пластмассовых нитях диаметром 50–500 мкм в оболочке из того же вещества, но с меньшим показателем преломления, где информация передается как последовательность световых импульсов. Яркий блеск многих природных кристаллов, а, в особенности, огранённых драгоценных и полудрагоценных камней, объясняется полным внутренним отражением, в результате которого каждый вошедший в кристалл луч

образует большое количество достаточно ярких вышедших лучей, окрашенных в результате дисперсии. Фата-моргана, эффекты миража, например, иллюзия мокрой дороги при летней жаре, возникают из-за полного отражения между слоями воздуха с разной температурой.

4. Тонкие линзы. Типы тонких линз и их основные характеристики

Отражение и преломление света используют для того, чтобы изменять направление лучей. На этом основано создание и функционирование специальных оптических приборов, таких как лупа, телескоп, микроскоп и другие, главной частью которых является линза.

Линзами называют прозрачные тела, ограниченные с двух сторон криволинейными поверхностями (выпуклыми или вогнутыми), в частном случае одна из них может быть плоской. Если толщина самой линзы мала по сравнению с радиусами кривизны сферических поверхностей, то линзу называют **тонкой**. Линзы бывают **собирающими** и **рассеивающими**. На оптических схемах тонкие линзы обозначаются двуправленными стрелками (рис. 1.5).

Собирающие линзы бывают двояковыпуклые, плоско-выпуклые, вогнуто-выпуклые (положительный мениск), а рассеивающие линзы – двояковогнутые, плоско-вогнутые и выпукло-вогнутые (отрицательный мениск).

Собирающая линза в средней части толще, чем у краев, и отклоняет лучи к оптической оси, если показатель преломления линзы больше пока-

зателя преломления среды. Рассеивающая линза в средней части тоньше, чем у краев, и отклоняет лучи от оптической оси.

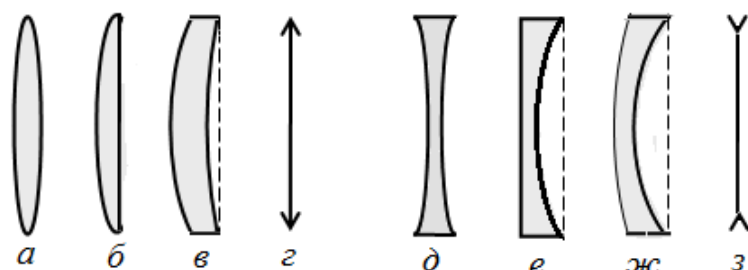


Рисунок 1.5 – Типы линз: *а, б, в* – собирающие; *д, е, ж* – рассеивающие; *г, з* – условные обозначения

Прямая MN (рис. 1.6), проходящая через центры кривизны поверхностей, ограничивающих линзу, называется **главной оптической осью линзы**. **Главная плоскость линзы** – плоскость, проходящая через оптический центр линзы O перпендикулярно главной оптической оси. **Оптическим центром линзы** называется точка O , лежащая на оптической оси и обладающая тем свойством, что лучи проходят сквозь нее не преломляясь. Для двояковыпуклых и двояковогнутых линз оптический центр располагается внутри линзы. Любая другая прямая, проходящая через оптический центр, и не совпадающая с главной оптической осью, называется **побочной оптической осью $M'N'$** .

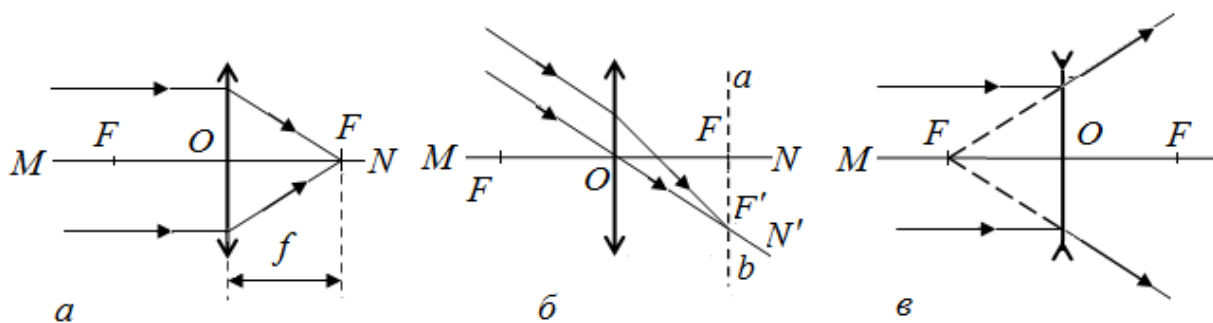


Рисунок 1.6

Точки F , лежащие по обе стороны линзы на главной оптической оси, называются **главными фокусами**. В фокусе собираются лучи, падающие параллельно главной оптической оси, после преломления их в линзе.

Рассеивающая линза отклоняет параллельно падающие на нее лучи от главной оптической оси. Главный фокус рассеивающей линзы – это точка на главной оптической оси, через которую проходят продолжения расхо-

дящегося пучка лучей, параллельных главной оптической оси. Фокус рассеивающей линзы всегда мнимый.

Фокальная плоскость линзы ab проходит через фокус перпендикулярно главной оптической оси. Расстояние между главным фокусом и оптическим центром линзы f – **фокусное расстояние линзы**.

Точки пересечения побочных оптических осей $M'N'$ с фокальной плоскостью ab называются **побочными фокусами F'** . В побочном фокусе сходятся все лучи, падающие на линзу параллельно побочной оптической оси.

Построение изображения предмета в линзах осуществляется с помощью **базовых лучей**, каковыми являются:

1. луч, проходящий через оптический центр линзы O , который не изменяет своего направления распространения;
2. луч, параллельный главной оптической оси, который после преломления в собирающей линзе проходит через фокус, а после преломления в рассеивающей линзе кажется исходящим из фокуса, лежащего по другую сторону от линзы;
3. луч (или его продолжение), проходящий через первый фокус линзы, который после преломления в линзе выходит из нее параллельно главной оптической оси;
4. луч, идущий под углом к главной оптической оси, который после преломления в линзе проходит через точку пересечения побочной оптической оси, параллельной лучу, с фокальной плоскостью.

5. Построение изображений предметов с помощью линз

Основное свойство линз – создавать изображения предметов. Изображения в зависимости от типа линзы и положения предмета относительно линзы могут быть прямыми или перевернутыми, действительными или мнимыми, увеличенными или уменьшенными.

Пользуясь лучами, ход которых известен, можно получить изображения предмета с помощью геометрических построений.

В зависимости от взаимного положения предмета и **собирающей** линзы возможны следующие случаи:

- а. Если предмет располагается за двойным фокусным расстоянием, то полученное изображение будет уменьшенным, перевернутым и действительным (рис. 1.7, а);

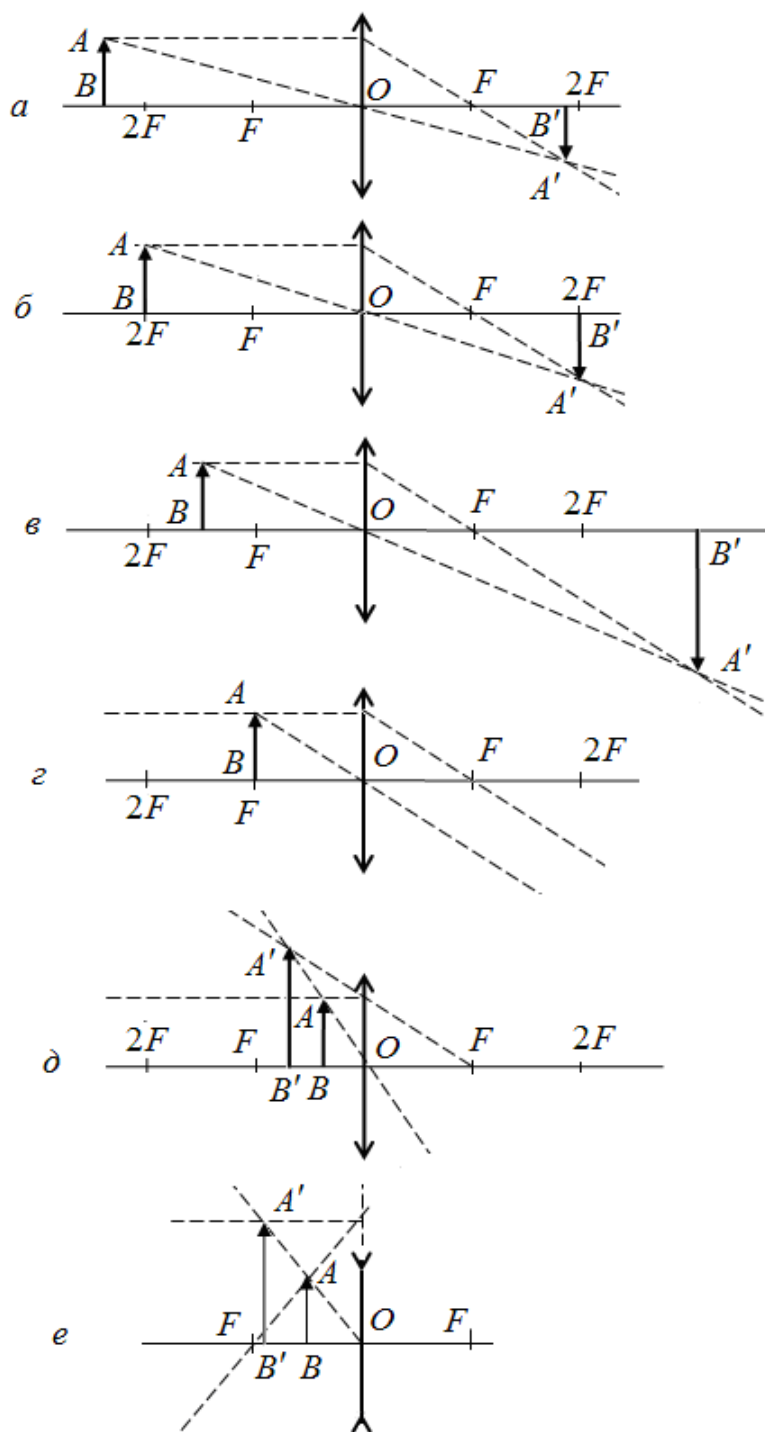


Рисунок 1.7 – Построение изображений в собирающей (*a – д*) и рассеивающей (*е*) линзах

б. Если предмет находится в точке двойного фокуса, то полученное изображение будет равным по высоте, перевернутым и действительным (рис. 1.7, б);

в. Если предмет находится между точками фокуса и двойного фокуса, то полученное изображение предмета будет увеличенным, перевернутым и действительным (рис. 1.7, в);

г. Предмет, помещенный в фокус собирающей линзы, не дает изображения, т. к. базовые лучи параллельны друг другу (рис. 1.7, з);

д. Предмет, помещенный между фокусом и линзой, дает увеличенное, прямое и мнимое изображение (рис. 1.7, д).

Построение показывает, что **рассеивающая** линза всегда дает мнимое, уменьшенное, прямое изображение предмета, расположенное с той же стороны от линзы, что и сам предмет (рис. 1.7, е).

6. Формула тонкой линзы. Оптическая сила и увеличение линзы. Абберации

Фокусное расстояние линзы f связано с радиусами кривизны (R_1 и R_2) поверхностей, ограничивающих линзу, и показателями преломления материалов линзы (n_l) и среды (n_{cp}), соответственно, соотношением, называемым **уравнением шлифовщика линз**:

$$\frac{1}{f} = \left(\frac{n_l}{n_{cp}} - 1 \right) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right). \quad (1.6)$$

В вакууме или в воздухе, где показатель преломления $n_{cp} = n = 1$, формула приобретает вид

$$\frac{1}{f} = (n - 1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right). \quad (1.7)$$

Эта формула справедлива для любых тонких линз: двояковыпуклых, двояковогнутых, плосковыпуклых и т.д. Надо только использовать **правило знаков**: если направление отсчета любого направленного отрезка совпадает с направлением распространения света, то соответствующее расстояние считается положительным, в противном случае – отрицательным.

Поэтому для двояковыпуклой линзы $R_1 > 0$ и $R_2 < 0$, а фокусное расстояние положительно ($f > 0$). А для двояковогнутой линзы $R_1 < 0$, $R_2 > 0$, а фокусное расстояние отрицательно ($f < 0$).

Положение изображения и его характер можно получить не только графическим построением, но и расчетами с помощью формулы. Если a – расстояние от предмета до тонкой линзы, b – расстояние от линзы до изображения предмета, а f – фокусное расстояние линзы, то **формула тонкой линзы** имеет вид

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}. \quad (1.8)$$

Следует помнить, что величины a, b, f являются алгебраическими и для них действует правило знаков. Расстояния a и b откладываются от точки O и являются положительными, если направлены по ходу светового луча, отрицательными – в противоположном направлении.

Для двояковыпуклой линзы ($R_1 > 0, a > 0, R_2 < 0, b < 0$), придерживаясь правила знаков, формулу линзы можно записать, используя абсолютные значения величин, следующим образом

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \left(\frac{n_{\text{л}}}{n_{\text{ср}}} - 1 \right) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right). \quad (1.9)$$

Оптическая сила линзы D – величина, обратная фокусному расстоянию, выраженному в метрах

$$D = \frac{1}{f}. \quad (1.10)$$

Единицей оптической силы является **диоптрия** (дптр). Одна диоптрия – это оптическая сила линзы, фокусное расстояние которой равно 1метру, т. е. $1 \text{ дптр} = \text{м}^{-1}$.

Оптическую силу собирающих линз полагают положительной, а рассеивающих – отрицательной.

В зависимости от положения предмета по отношению к линзе изменяются линейные размеры изображения. **Линейным увеличением** линзы Γ называют отношение линейных размеров изображения h' и предмета h (рис.1.8).

$$\Gamma = \frac{h'}{h}. \quad (1.11)$$

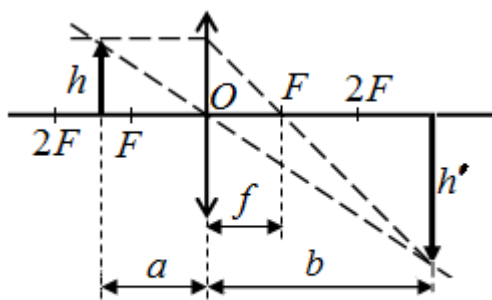


Рисунок 1.8

Величине удобно приписывать знаки «плюс» или «минус» в зависимости от того, является изображение прямым или перевернутым. Величина h' всегда считается положительной, поэтому для прямых изображений $\Gamma > 0$, для перевернутых $\Gamma < 0$.

С учетом того, что $\frac{h}{a} = \frac{h'}{b}$, можно вы-

разить увеличение как

$$\Gamma = \frac{b}{a}, \quad (1.12)$$

где a и b – расстояние от линзы до предмета и изображения, соответственно.

Во многих оптических приборах свет проходит через две или большее количество линз. В этом случае изображение, получаемое с помощью первой линзы, служит объектом для второй линзы и т. д.

Оптическая сила системы, состоящей из двух линз с оптическими силами D_1 и D_2 , находящихся в воздухе на расстоянии d друг от друга, определяется формулой

$$D = D_1 + D_2 - dD_1D_2, \quad (1.13)$$

а в случае, если эти линзы расположены вплотную друг к другу, формулой

$$D = D_1 + D_2. \quad (1.14)$$

Общее линейное увеличение Γ системы из двух линз равно произведению линейных увеличений обеих линз

$$\Gamma = \Gamma_1 \cdot \Gamma_2. \quad (1.15)$$

Если предмет или его изображение находятся в бесконечности, то линейное увеличение утрачивает смысл.

Тонкие линзы обладают рядом недостатков, не позволяющих получать высококачественные изображения. Искажения, возникающие при формировании изображения, называются **абберациями**. Главные из них – сферическая и хроматическая абберации.

Сферическая aberrация проявляется в том, что в случае широких световых пучков лучи, далекие от оптической оси, пересекают ее не в фокусе. Формула тонкой линзы справедлива только для лучей, близких к оптической оси. Изображение удаленного точечного источника, создаваемое широким пучком лучей, преломленных линзой, оказывается размытым.

Хроматическая aberrация возникает вследствие того, что показатель преломления материала линзы зависит от длины волны света. Это свойство прозрачных сред называется дисперсией. Фокусное расстояние линзы оказывается различным для света с разными длинами волн, что приводит к размытию изображения при использовании немонахроматического, например, естественного света.

В современных оптических приборах применяются не тонкие линзы, а сложные многолинзовые системы, в которых удастся приближенно устранить различные aberrации.

7. Глаз как оптическая система. Применение линз. Лупа. Микроскоп

Формирование собирающей линзой действительного изображения предмета используется во многих оптических приборах, где линзы являются основным оптическим элементом. Двояковыпуклые линзы используются в большинстве оптических приборов. Такой же линзой является и хрусталик глаза человека.

1. **Глаз человека** (рис. 1.9) имеет приблизительно форму шара диаметром около 2,5 см. Он окружен тремя оболочками, в одной из которых – радужной оболочке имеется круглое отверстие – зрачок, диаметр которого в зависимости от освещенности и других факторов меняется от 2 до 8 мм.

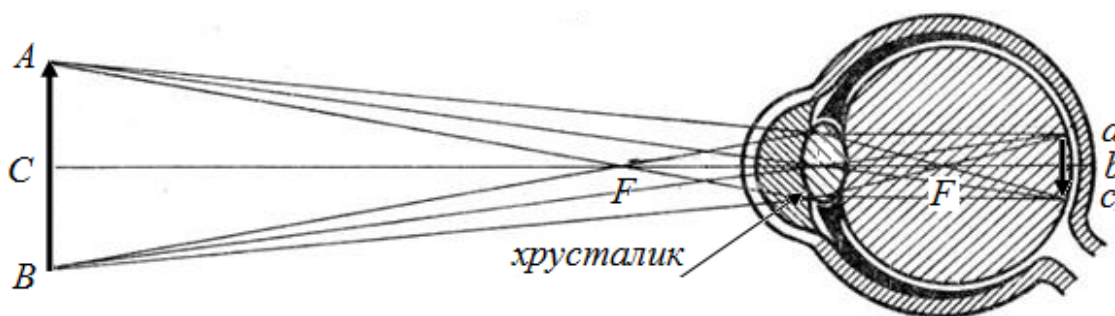


Рисунок 1.9 – Глаз как оптическая система

Непосредственно за зрачком расположен хрусталик, представляющий собой прозрачное упругое тело, имеющее форму двояковыпуклой линзы.

Кривизна поверхностей хрусталика может меняться в результате действия облегающей его со всех сторон мышцы. Посредством изменения кривизны поверхностей хрусталика достигается приведение изображения предметов, находящихся на различных расстояниях, точно на поверхность чувствительного слоя сетчатки, расположенной на внутренней задней поверхности глаза. Этот процесс называется **аккомодация**. С помощью мышечного усилия, увеличивающего кривизну хрусталика и, следовательно, уменьшающего его фокусное расстояние, глаз осуществляет наводку на резкость. Наименьшее расстояние, на котором нормальный глаз может отчетливо видеть предметы, меняется в зависимости от возраста от 10 см до 22 см, и в пожилом возрасте доходит до 30 см.

Нередко задний фокус глаза находится не на самой сетчатке (как у нормального глаза), а с одной или с другой стороны от нее. Если точка фокуса лежит внутри глаза перед сетчаткой, то глаз называется **близоруким** (рис. 1.10, *а*). Такой глаз не может отчетливо видеть отдаленные предметы, т. к. напряжение мышц при аккомодации еще сильнее отдаляют фокус от сетчатки. Для исправления близорукости применяются очки с рассеивающими линзами (рис. 1.10, *в*). В дальнозорком глазу фокус при спокойном состоянии находится за сетчаткой, т. е. дальнозоркий глаз преломляет слабее нормального. Для коррекции дальнозоркости применяют очки с собирающими линзами (рис. 1.10, *б*, *г*).

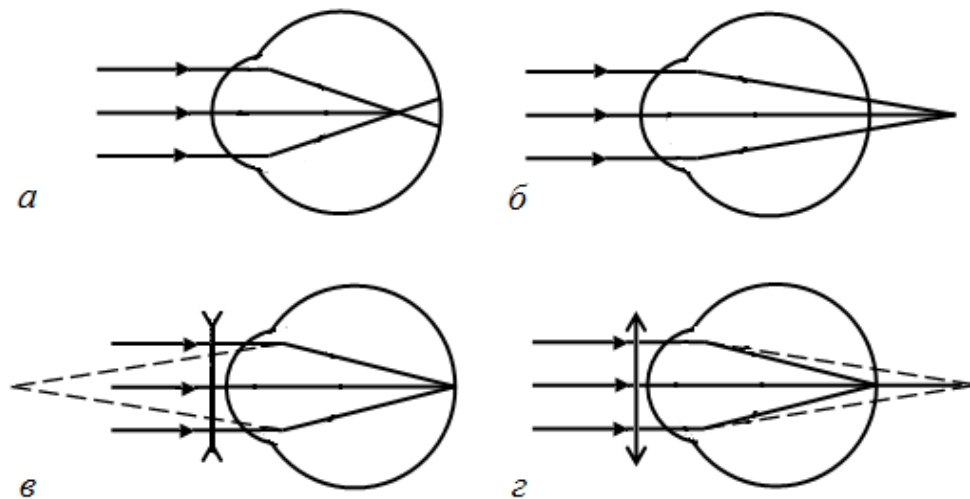


Рисунок 1.10 – *а* – близорукость; *б* – дальнозоркость;
в, *г* – их коррекция с помощью линз

2. Простейшим оптическим прибором является **лупа** – собирающая линза (или система) линз с фокусным расстоянием от 5 до 125 мм (рис. 1.11).

Лупа располагается между глазом и предметом так, чтобы предмет находился между лупой и точкой фокуса. В результате лупа позволяет получать увеличенное, прямое, мнимое изображение. Построение изображения в лупе соответствует рис. 1.7,е.



Рисунок 1.11 – Лупы

Если для нормального глаза *расстояние наилучшего видения* составляет $L = 0,25$ м, а f – фокусное расстояние, выраженное в метрах, то увеличение лупы можно посчитать по следующей приближенной формуле

$$\Gamma = \frac{L}{f} = \frac{0,25}{f} . \quad (1.16)$$

Так, например, лупа с фокусным расстоянием $f = 0,05$ м дает пятикратное увеличение.

Обычно применяемые лупы дают увеличение от 2 до 10 раз. Большие увеличения требуют очень малых фокусных расстояний, что делает невозможным использование луп с увеличением свыше 40-кратного.

3. Для получения больших увеличений применяют микроскоп (рис. 1.12).

Микроскопом называют оптический прибор, позволяющий рассматривать очень мелкие предметы, в том числе и те, которые не видны невооруженным глазом. Микроскоп состоит из двух короткофокусных собирающих линз – *объектива*, приближенного к объекту наблюдения, и *окуляра*, расположенного вблизи глаза наблюдателя. Расстояние между линзами может меняться. Ход лучей в микроскопе показан на рис. 1.13.

Объектив создает увеличенное, перевернутое, действительное изображение h' объекта h . С помощью микрометрического финта окуляр перемещают относительно объектива так, чтобы промежуточное изображение

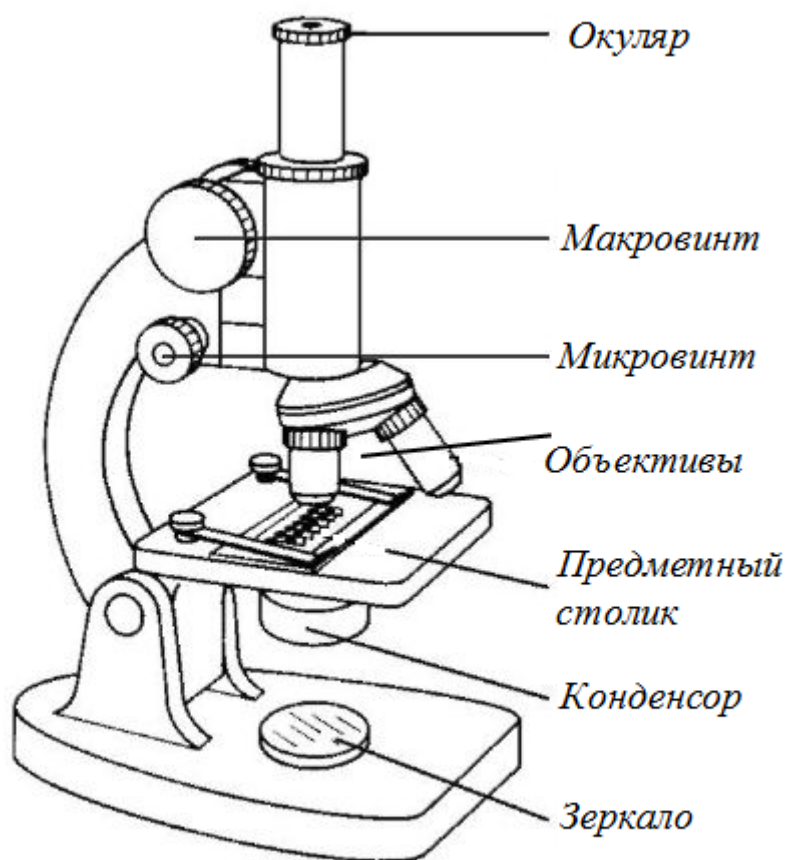


Рисунок 1.12 – Оптический микроскоп

h' оказалось между передним фокусом окуляра и оптическим центром окуляра $O_{ок}$. В этом случае окуляр становится лупой, объектом для которой является промежуточное изображение. При этом окуляр создает увеличенное, прямое (относительно промежуточного h'), мнимое изображение h'' объекта h . Использование микроскопа приводит к значительному увеличению угла зрения φ , под которым глаз рассматривает предмет, что позво-

ляет отчетливо увидеть детали, не видимые невооруженным глазом.

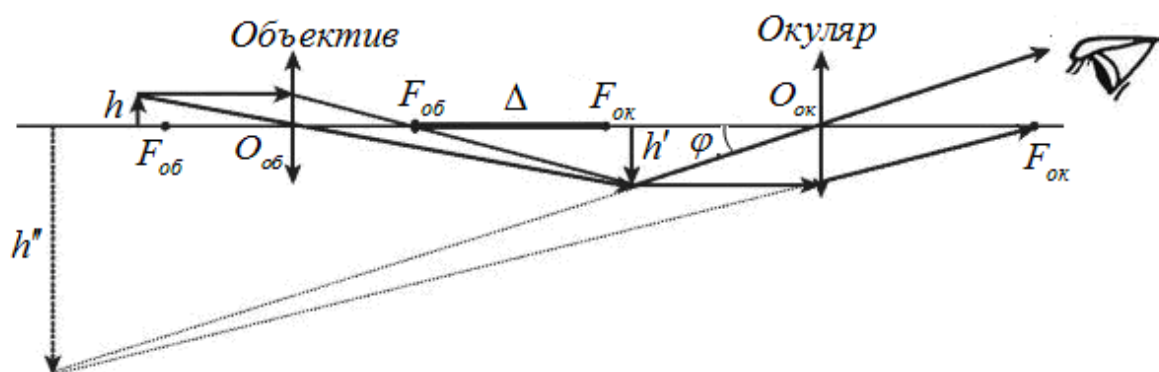


Рисунок 1.13 – Ход лучей в микроскопе

Линейное увеличение микроскопа определяется как

$$\Gamma = \frac{h''}{h} = \frac{h''}{h'} \cdot \frac{h'}{h} = \Gamma_{ок} \cdot \Gamma_{об}. \quad (1.17)$$

Для расчета **линейного увеличения объектива** можно использовать приближенную формулу

$$\Gamma_{об} = \frac{\Delta}{f_{об}}, \quad (1.18)$$

где $f_{об}$ – фокусное расстояние объектива, а Δ – **длина тубуса микроскопа** (равна расстоянию между передним фокусом окуляра и задним фокусом объектива).

Линейное увеличение окуляра определяют по той же формуле (1.16), что и увеличение лупы

$$\Gamma = \frac{L}{f_{ок}}, \quad (1.19)$$

где $L = 0,25$ м – расстояние наилучшего зрения, а $f_{ок}$ – фокусное расстояние окуляра.

Тогда линейное увеличение микроскопа равно

$$\Gamma = \frac{\Delta \cdot L}{f_{об} \cdot f_{ок}}. \quad (1.20)$$

II. ЗАДАЧИ

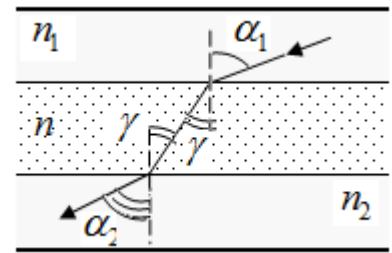
Задача 1.1

Между стеклянными пластинками с показателями преломления n_1 и n_2 находится слой жидкости с показателем преломления n . Луч света, распространяющийся в первой пластинке под углом α_1 ($\alpha_1 < \alpha_{np}$) к границе раздела «стекло-жидкость», выходя из слоя жидкости, входит во вторую стеклянную пластинку под углом α_2 . Доказать, что в данном случае выполняется соотношение $\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{n_1}{n_2}$ независимо от наличия слоя жидкости между пластинами.

Решение

Запишем закон преломления для границ раздела «первая среда – жидкость», «жидкость – вторая среда»:

$$\begin{cases} \frac{\sin \alpha_1}{\sin \gamma} = \frac{n}{n_1}, \\ \frac{\sin \gamma}{\sin \alpha_2} = \frac{n_2}{n}. \end{cases}$$



Разделив первое уравнение системы на второе, получим

$$\frac{\sin \alpha_1 \cdot \sin \gamma}{\sin \gamma \cdot \sin \alpha_2} = \frac{n \cdot n_2}{n_1 \cdot n},$$

и, окончательно,

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{n_2}{n_1}.$$

Задача 1.2

На плоскопараллельную стеклянную пластинку с показателем преломления $n = 1,73$ и толщиной $b = 1$ см падает луч света под углом $\alpha = 60^\circ$. Свет частично отражается, а частично, преломляясь, проходит в стекло, отражается от его нижней поверхности и, преломившись вторично,

выходит обратно в воздух параллельно первому отраженному лучу. Определить расстояние между лучами DC .

Решение

Рассмотрим $\triangle ACD$. Угол $\angle DAC = 90^\circ - \alpha$, поскольку в сумме с углом отражения дает 90° . С учетом того, что $\angle ADC = 90^\circ$, т. к. отрезок DC перпендикулярен отраженному лучу, $\angle DCA = \alpha$, а $DC = AC \cdot \cos \alpha$.

В $\triangle AKB$ сторона $AK = b \cdot \operatorname{tg} \alpha$. Из равенства прямоугольных треугольников $\triangle AKB$ и $\triangle KCB$ по общей стороне $KB = b$ и равным углом $\angle ABK = \angle KBC = \gamma$ следует, что $AK = KC$. Поэтому, $AC = 2 \cdot AK = 2b \cdot \operatorname{tg} \gamma$.

Угол преломления найдем из закона преломления $\frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} = n$, тогда

$$\sin \gamma = \frac{\sin \alpha}{n} = \frac{\sin 60^\circ}{1,73} = 0,5,$$

$$\gamma = \arcsin 0,5 = 30^\circ.$$

Тогда искомое расстояние равно

$$\begin{aligned} DC &= AC \cdot \cos \alpha = 2b \cdot \operatorname{tg} \gamma \cdot \cos \alpha = 2 \cdot 10^{-2} \cdot \operatorname{tg} 30^\circ \cdot \cos 60^\circ = \\ &= 2 \cdot 10^{-2} \cdot 0,577 \cdot 0,5 = 5,77 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 0,577 \text{ см}. \end{aligned}$$

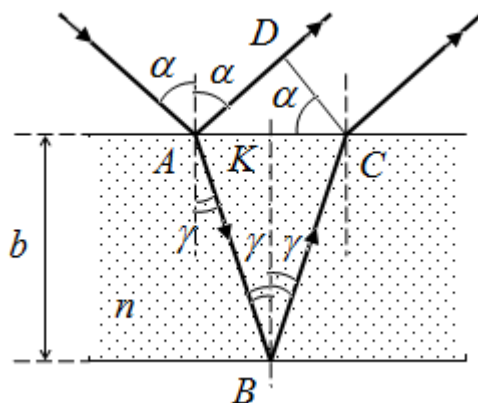
Задача 1.3

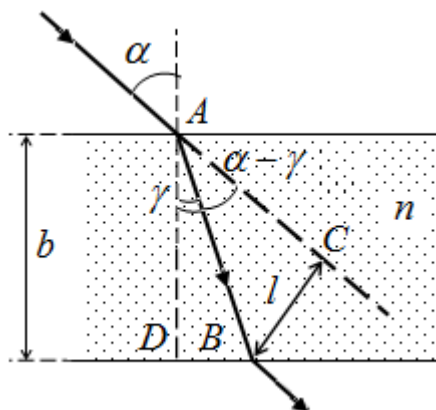
На плоскопараллельную пластинку с показателем преломления $n = 1,5$ и толщиной $b = 5$ см падает луч света под углом $\alpha = 30^\circ$. Определить боковое смещение луча, прошедшего через пластинку.

Решение

Боковое смещение луча – это отрезок $l = BC$.

Поскольку $\angle DAC = \alpha$, а $\angle DAC = \gamma$, то $\angle BAC = \alpha - \gamma$. Тогда в треугольнике $\triangle ACB$ сторона $BC = AB \cdot \sin(\alpha - \gamma)$.





По закону преломления $\frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} = n$,

$$\sin \gamma = \frac{\sin \alpha}{n} = \frac{\sin 30^\circ}{1,5} = 0,333,$$

$$\gamma = \arcsin 0,333 = 19,47^\circ.$$

$$\cos \gamma = \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \alpha}{n^2}} = \sqrt{1 - \frac{0,25}{2,25}} = 0,943.$$

Из треугольника $\triangle ABD$ $AB = \frac{b}{\cos \gamma}$. Тогда боковое смещение луча определится как

$$l = BC = AB \cdot \sin(\alpha - \gamma) = \frac{b \cdot \sin(\alpha - \gamma)}{\cos \gamma}.$$

Подстановка численных значений дает

$$l = \frac{0,05 \cdot \sin(30^\circ - 19,47^\circ)}{\cos 19,47^\circ} = \frac{0,05 \cdot 0,183}{0,943} = 9,7 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 9,7 \text{ мм}.$$

Задача 1.4

Предельный угол полного внутреннего отражения на границе стекло-жидкость равен $\alpha_{np} = 65^\circ$. Определить: 1) показатель преломления жидкости n_2 , если показатель преломления стекла $n_1 = 1,5$; 2) скорости распространения света в стекле и в жидкости.

Решение

1) Явление полного внутреннего отражения наблюдается, если луч света переходит из среды с бóльшим показателем преломления (в нашем случае стекло $n_1 = 1,5$) в среду с меньшим показателем преломления $n_2 < n_1$. В этом случае предельный угол полного внутреннего отражения $\sin \alpha_{np} = \frac{n_2}{n_1}$.

Тогда искомый показатель преломления жидкости

$$n_2 = n_1 \sin \alpha_{np} = 1,5 \cdot \sin 65^\circ = 1,36.$$

2) Абсолютный показатель преломления равен отношению скорости света в вакууме $c = 3 \cdot 10^8$ м/с к скорости света в среде v , т. е. $n = \frac{c}{v}$.

Поэтому скорость света:

- в стекле
$$v_1 = \frac{c}{n_1} = \frac{3 \cdot 10^8}{1,5} = 2 \cdot 10^8 \text{ м/с};$$

- в жидкости
$$v_2 = \frac{c}{n_2} = \frac{3 \cdot 10^8}{1,36} = 2,2 \cdot 10^8 \text{ м/с}.$$

Следует обратить внимание на то, что скорости распространения света в стекле и в жидкости относятся как показатели преломления сред, в которых свет распространяется, а именно,

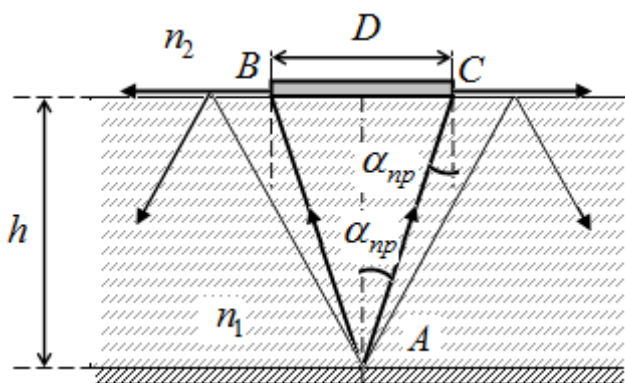
$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{n_1}{n_2}.$$

Задача 1.5

На дне сосуда, наполненного водой с показателем преломления $n = 1,33$ до высоты $h = 25$ см, находится точечный источник света. На поверхности воды плавает непрозрачная круглая пластинка так, что центр пластинки находится над источником света. Чему равен предельный угол полного внутреннего отражения? Какой наименьший радиус должна иметь эта пластинка, чтобы ни один луч не мог выйти из воды.

Решение

Лучи от источника света, переходя из оптически более плотной (вода) в оптически менее плотную среду (воздух), падают на границу раздела «вода-воздух», образуя расходящийся пучок. При этом, те лучи, которые падают на границу раздела под углами меньшими, чем предельный угол полного внутреннего отражения, отражаются обратно в воду. Лучи, падающие под меньшими углами, могли бы выйти из воды, но путь им преграждает непрозрачная пластинка.



По закону преломления $\frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} = n_{21} = \frac{n_2}{n_1}$. Для луча AC , идущего под предельным углом полного внутреннего отражения, угол преломления $\gamma = 90^\circ$, следовательно, $\sin \gamma = \sin 90^\circ = 1$, а, значит, $\sin \alpha_{np} = \frac{n_2}{n_1}$.

С учетом того, что для воздуха $n_2 = 1$, то $\sin \alpha_{np} = \frac{1}{n_1} = \frac{1}{1,33} = 0,752$. Предельный угол равен $\alpha_{np} = \arcsin 0,752 = 48,75^\circ$.

Из треугольника ΔAKC , в котором угол $\angle KAC = \alpha_{np}$ $R = KC = KA \cdot \operatorname{tg} \alpha_{np} = h \cdot \operatorname{tg} \alpha_{np} = 0,25 \cdot \operatorname{tg} 48,75^\circ = 0,285$ м.

Задача 1.6

Показатели преломления стекла для красного и фиолетового лучей равны $n_{кр} = 1,51$ и $n_{ф} = 1,53$, соответственно. Найти предельные углы полного внутреннего отражения при падении этих лучей на поверхность раздела «стекло – воздух».

Решение

Явление полного внутреннего отражения наблюдается при переходе светового луча из оптически более плотной среды в среду оптически менее плотную, т. е. имеющую меньший показатель преломления. при этом существует такое значение угла падения (α_{np}), при котором угол преломления равен 90° и преломленный луч распространяется вдоль границы раздела двух сред. Значение предельного угла можно найти из закона преломления, приняв $\sin \gamma = \sin 90^\circ = 1$:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} = \sin \alpha_{np} = \frac{n_2}{n_1}.$$

Поскольку в задаче рассматривается граница «стекло-воздух», то n_1 – показатель преломления стекла, а $n_2 = 1$ – показатель преломления воздуха.

С учетом этого $\sin \alpha_{np} = \frac{1}{n_1}$.

Подставляя значения показателя преломления для красного и фиолетового света, получим

$$\sin \alpha_{np} = \frac{1}{n_{кр}} = \frac{1}{1,51} = 0,662; \quad (\alpha_{np})_{кр} = \arcsin 0,662 = 41,5^\circ;$$

$$\sin \alpha_{np} = \frac{1}{n_{кр}} = \frac{1}{1,53} = 0,654; \quad (\alpha_{np})_{ф} = \arcsin 0,654 = 40,8^\circ.$$

Задача 1.7

Монохроматический свет падает нормально на боковую поверхность призмы ($n=1,6$). Преломляющий угол призмы $\varphi = 30^\circ$. 1) Найти отклонение луча на выходе из призмы от первоначального направления. 2) При каком преломляющем угле призмы φ_0 луч света не выйдет из призмы?

Решение

1) Поскольку свет падает на боковую поверхность призмы нормально, то при переходе в призму он не испытывает преломления. Достигнув противоположной боковой поверхности, луч падает на нее под углом α . Этот угол равен $\alpha = 90^\circ - \angle ACB$. В свою очередь из прямоугольного треугольника $\triangle ACB$ угол $\angle ACB = 90^\circ - \varphi = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$.

В результате, угол падения $\alpha = 90^\circ - \angle ACB = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$.

Из закона преломления $\frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} = \frac{n_1}{n}$. Поскольку показатель преломления

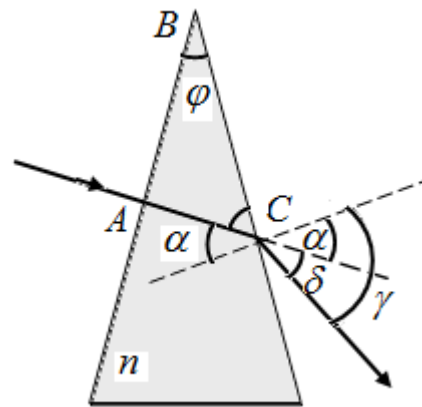
для воздуха $n_1 = 1$, то

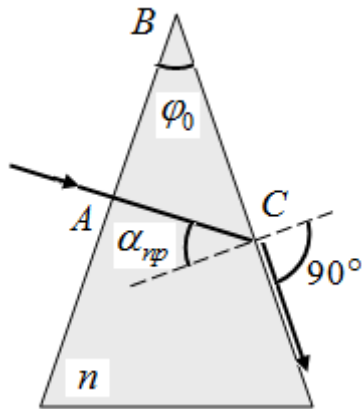
$$\sin \gamma = n \cdot \sin \alpha = 1,6 \cdot \sin 30^\circ = 0,8.$$

Угол преломления $\gamma = \arcsin 0,8 = 53,13^\circ$.

Тогда искомое угловое отклонение луча составит

$$\delta = \gamma - \alpha = 53,13^\circ - 30^\circ = 23,13^\circ.$$





2) Если вследствие полного внутреннего отражения луч после прохождения призмы не выходит из нее, значит угол падения на боковую поверхность равен или больше предельного угла полного внутреннего отражения: при $\alpha = \alpha_{np}$ луч распространяется вдоль границы раздела двух сред, а при $\alpha > \alpha_{np}$ луч будет отражаться вовнутрь призмы.

В предельном случае $\alpha = \alpha_{np}$, $\gamma = 90^\circ$, а $\sin \gamma = 1$. Тогда из закона преломления

$$\sin \alpha_{np} = \frac{1}{n} = \frac{1}{1,6} = 0,625,$$

$$\alpha_{np} = \arcsin 0,625 = 38,68^\circ.$$

Поскольку $\varphi_0 = \alpha_{np}$ (как углы со взаимно перпендикулярными сторонами), то

$$\varphi_0 = 38,68^\circ,$$

т. е. при преломляющем угле призмы $\varphi_0 \geq 38,68^\circ$ луч света не выйдет из призмы вследствие явления полного внутреннего отражения.

Задача 1.8

Преломляющий угол равнобедренной призмы $\varphi = 45^\circ$. Монохроматический луч падает на боковую грань под углом $\alpha_1 = 30^\circ$. Показатель преломления материала призмы $n = 1,6$. Найти угол δ отклонения луча от первоначального направления.

Решение

Искомый угол δ образован продолжением луча S , падающего на левую боковую поверхность призмы, и продолжением луча S' , вышедшего из правой боковой поверхности призмы. Продолжения лучей S и S' пересекаются в точке C и образуют $\triangle ABC$, в котором углы $\angle CAB = \alpha_1 - \gamma_1$, а $\angle CBA = \gamma_2 - \alpha_2$. Угол δ , являющийся внешним углом $\triangle ABC$, равен

$$\delta = \angle CAB + \angle CBA = (\alpha_1 - \gamma_1) + (\gamma_2 - \alpha_2) = \alpha_1 + \gamma_2 - (\alpha_2 + \gamma_1).$$

Вершина D треугольника $\triangle ABD$ является точкой пересечения нормалей к боковым поверхностям пирамиды. Внешний угол этого треугольника $\angle BDN'_1 = \alpha_2 + \gamma_1$. С другой стороны, угол $\angle BDN'_1$ равен преломляющему углу призмы φ (как углы со взаимно перпендикулярными сторонами), поэтому $\varphi = \alpha_2 + \gamma_1$. И тогда,

$$\delta = \alpha_1 + \gamma_2 - \varphi.$$

Для нахождения угла преломления γ_2 применим закон преломления последовательно к левой и правой боковым поверхностям призмы.

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \gamma_1} = n,$$

$$\sin \gamma_1 = \frac{\sin \alpha_1}{n} = \frac{\sin 30^\circ}{1,6} = 0,31,$$

$$\gamma_1 = \arcsin 0,3125 = 18,2^\circ.$$

$$\frac{\sin \alpha_2}{\sin \gamma_2} = \frac{1}{n},$$

$$\sin \gamma_2 = n \cdot \sin \alpha_2.$$

Поскольку из $\triangle ABD$ $\alpha_2 = \varphi - \gamma_1$, то

$$\sin \gamma_2 = n \cdot \sin \alpha_2 = n \cdot \sin(\varphi - \gamma_1) = 1,6 \cdot \sin(45^\circ - 18,2^\circ) = 1,6 \cdot \sin 26,8^\circ = 0,72,$$

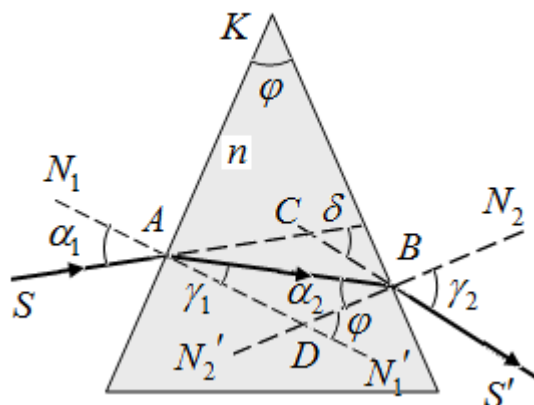
$$\gamma_2 = \arcsin 0,72 = 46^\circ.$$

Подставив найденные значения, найдем отклонение луча от первоначального направления

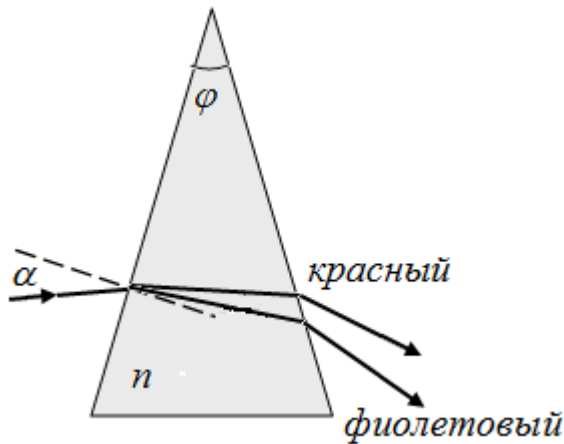
$$\delta = \alpha_1 + \gamma_2 - \varphi = 30^\circ + 46^\circ - 45^\circ = 31^\circ.$$

Задача 1.9

Монохроматический луч падает на боковую грань равнобедренной призмы под углом $\alpha = 12^\circ$. Преломляющий угол призмы $\varphi = 12^\circ$. Показатель преломления материала призмы $n = 1,55$. Найти: 1) угол отклонения



δ луча от первоначального направления, предполагая, что углы α и φ малы; 2) определить углы отклонения δ_k и δ_ϕ для красного и фиолетового лучей, если показатели преломления для этих лучей равны $n_k = 1,37$ и $n_\phi = 1,42$, соответственно.



Решение

Воспользуемся результатом задачи 1.8 для угла отклонения, который зависит от преломляющего угла призмы φ , угла падения α_1 на боковую грань призмы и угла преломления γ_2 на выходе луча из призмы,

$$\delta = \alpha_1 + \gamma_2 - \varphi.$$

При малом преломляющем угле φ и малом угле падения α значения синусов соответствующих углов равны значениям самих углов, а именно,

$$\sin \alpha_1 \simeq \alpha_1; \quad \sin \alpha_2 \simeq \alpha_2; \quad \sin \gamma_1 \simeq \gamma_1; \quad \sin \gamma_2 \simeq \gamma_2.$$

В этом случае закон преломления для боковых граней призмы имеет вид

$$\begin{cases} \frac{\alpha_1}{\gamma_1} = \frac{n}{1}, \\ \frac{\alpha_2}{\gamma_2} = \frac{1}{n}, \end{cases}$$

Откуда

$$\begin{cases} \gamma_1 = \frac{\alpha_1}{n}, \\ \gamma_2 = n \cdot \alpha_2. \end{cases}$$

Так как $\alpha_2 = \varphi - \gamma_1$, то для угла преломления на второй грани получим

$$\gamma_2 = n \cdot \alpha_2 = n(\varphi - \gamma_1) = n\left(\varphi - \frac{1}{n}\right).$$

Подставим полученные значения и получим выражение для искомого отклонения лучей

$$\delta = \alpha_1 + n\left(\varphi - \frac{\alpha_1}{n}\right) - \varphi = \alpha_1 + n\varphi - \alpha_1 - \varphi = n\varphi - \varphi = \varphi(n-1),$$

$$\delta = \varphi(n-1) = 12^\circ(1,55-1) = 6,6^\circ.$$

Таким, образом, если преломляющий угол призмы мал, то при малых углах падения угол отклонения не зависит от угла падения и определяется только величиной преломляющего угла и показателем преломления материала призмы.

2) Подставив в полученную формулу значения показателей преломления для красных и фиолетовых лучей $n_k = 1,37$ и $n_\phi = 1,42$, получим

$$\delta_{кр} = 12^\circ(1,37-1) = 4,44^\circ,$$

$$\delta_\phi = 12^\circ(1,42-1) = 5,04^\circ.$$

Основываясь на полученных результатах, можно сделать вывод, что угловые отклонения оранжевого, желтого, зеленого, голубого и синего лучей находятся между $\delta_{кр}$ и δ_ϕ , т. е. отклонение увеличивается с ростом показателя преломления, который, в свою очередь, зависит от длины волны света. А это означает, что призма разлагает белый свет в спектр.

Задача 1.10

Найти фокусное расстояние для следующих линз:

а) двояковыпуклая – $R_1 = 15$ см, $R_2 = -25$ см;

б) плоско-выпуклая – $R_1 = 15$ см, $R_2 = \infty$;

в) вогнуто-выпуклая (положительный мениск) – $R_1 = 15$ см, $R_2 = 25$ см;

г) двояковогнутая – $R_1 = -15$ см, $R_2 = 25$ см;

д) плосковогнутая – $R_1 = \infty$, $R_2 = -15$ см;

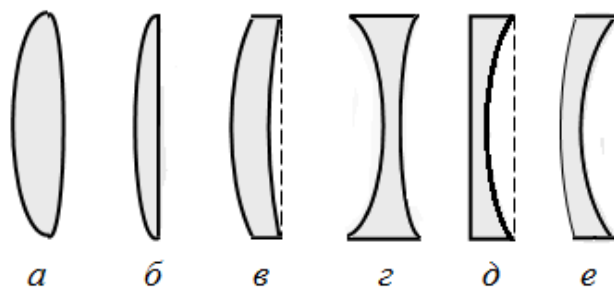
е) выпукло-вогнутая (отрицательный мениск) – $R_1 = 25$ см, $R_2 = 15$ см,

если показатель преломления материала линзы $n = 1,5$.

Решение

Выразим из уравнения (1.7) $\frac{1}{f} = (n-1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$ выразим фокусное расстояние

$$f = \frac{R_1 \cdot R_2}{(n-1)(R_2 - R_1)}.$$



Подстановка численных значений в полученную формулу дает

а) для двояковыпуклой линзы с $R_1 = 15$ см и $R_2 = -25$ см

$$f = \frac{0,15 \cdot (-0,25)}{(1,5-1) \cdot (-0,25-0,15)} = 0,188 \text{ м};$$

б) для плоско-выпуклой линзы с $R_1 = 15$ см и $R_2 = \infty$

$$\frac{1}{f} = (n-1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = \frac{(n-1)}{R_1},$$

$$f = \frac{R_1}{n-1} = \frac{0,15}{1,5-1} = 0,3 \text{ м};$$

в) для вогнуто-выпуклой линзы с $R_1 = 15$ см и $R_2 = 25$ см

$$f = \frac{0,15 \cdot 0,25}{(1,5-1)(0,25-0,15)} = 0,75 \text{ м};$$

г) для двояковогнутой линзы с $R_1 = -15$ см и $R_2 = 25$ см

$$f = \frac{(-0,15) \cdot 0,25}{(1,5-1)(0,25+0,15)} = -0,188 \text{ м};$$

д) для плосковогнутая линзы с $R_1 = \infty$ и $R_2 = -15$ см

$$\frac{1}{f} = (n-1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = -\frac{(n-1)}{R_2},$$

$$f = -\frac{R_2}{n-1} = -\frac{0,15}{1,5-1} = -0,3 \text{ м};$$

е) для выпукло-вогнутая линзы с $R_1 = 25$ см и $R_2 = 15$ см

$$f = \frac{0,25 \cdot 0,15}{(1,5-1)(0,15-0,25)} = -0,75 \text{ м}.$$

Линзы *а, б, в* являются собирающими, а *г, д, е* – рассеивающими.

Задача 1.11

Определить фокусные расстояния двояковыпуклой линзы для красных и фиолетовых лучей, если для желтых лучей фокусное расстояние $f_{жс} = 80$ см. Показатели преломления лучей равны, соответственно, $n_{кр} = 1,510$, $n_{жс} = 1,515$ и $n_{ф} = 1,531$.

Решение

Воспользуемся формулой (1.7) $\frac{1}{f} = (n-1) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$. Знак «плюс» перед

$\frac{1}{R_2}$ связан с тем, что для двояковыпуклой линзы $R_2 < 0$.

Запишем уравнения для желтого и красного лучей:

$$\begin{cases} \frac{1}{f_{жс}} = (n_{жс} - 1) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right), \\ \frac{1}{f_{кр}} = (n_{кр} - 1) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right). \end{cases}$$

Разделив первое уравнение системы на второе, получим

$$\frac{f_{кр}}{f_{жс}} = \frac{n_{кр} - 1}{n_{жс} - 1}.$$

Отсюда фокусное расстояние для красных лучей

$$f_{кр} = \frac{f_{жс}(n_{кр} - 1)}{n_{жс} - 1} = \frac{0,8 \cdot (1,51 - 1)}{1,515 - 1} = 0,792.$$

Аналогично найдем фокусное расстояние для фиолетовых лучей

$$f_{\phi} = \frac{f_{жс}(n_{\phi} - 1)}{n_{жс} - 1} = \frac{0,8 \cdot (1,531 - 1)}{1,515 - 1} = 0,825 \text{ м.}$$

Задача 1.12

Определить радиус кривизны линзы, изготовленной из стекла с показателем преломления $n = 1,55$, если ее оптическая сила составляет 3 диоптрии.

Решение

Оптическая сила линзы в диоптриях – это величина обратная фокусному расстоянию линзы, выраженному в метрах. Поэтому уравнение (1.7) в случае, когда линза находится в воздухе, можно записать в виде

$$D = (n - 1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right).$$

Учитывая, что для плосковыпуклой линзы $R_1 = \infty$, и полагая $R_2 = R$, получим

$$D = \frac{n - 1}{R}.$$

Отсюда радиус кривизны линзы равен

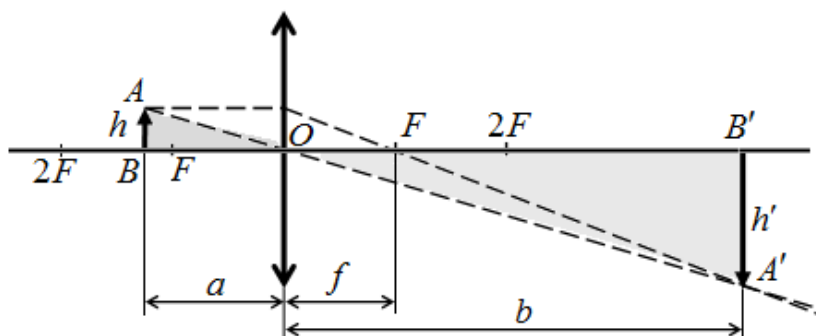
$$R = \frac{n - 1}{D} = \frac{1,55 - 1}{3} = 0,183 \text{ м.}$$

Задача 1.13

В 16 см от двояковыпуклой линзы с оптической силой $D = 8$ диоптрий расположен предмет, высота которого $h = 2$ см. Найти положение изображения предмета, высоту его изображения и увеличение линзы. Ответ пояснить графически.

Решение

Фокусное расстояние, являющееся величиной обратно пропорциональной оптической силе линзы, равно $f = \frac{1}{D} = \frac{1}{8} = 0,125$ м. Поскольку предмет находится на расстоянии $a = 0,16$ м от линзы, т.е. между фокусом и двойным фокусом линзы, изображение предмета получается увеличенным, перевернутым, действительным (рис. 1.8).



Из формулы тонкой линзы (1.8) $D = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$, расстояние до предмета

$$b = \frac{a}{aD - 1} = \frac{0,16}{0,16 \cdot 8 - 1} = 0,57 \text{ м.}$$

Дальнейшее решение задачи может быть осуществлено двумя способами.

1. Из рассмотрения прямоугольных треугольников $\triangle ABO$ и $\triangle A'B'O$, которые являются подобными, следует пропорциональность соответствующих сторон, а, именно, $AB : A'B' = BO : B'O$, в результате чего $\frac{h}{h'} = \frac{a}{b}$. Окончательно, размер изображения будет

$$h' = h \frac{b}{a} = \frac{0,02 \cdot 0,57}{0,16} = 0,071 \text{ м.}$$

Увеличение линзы

$$\Gamma = \frac{h'}{h} = \frac{0,071}{0,16} = 3,55.$$

2. Увеличение линзы может быть найдено как

$$\Gamma = \frac{b}{a} = \frac{0,57}{0,16} = 3,55.$$

Тогда величина изображения из $\Gamma = \frac{h'}{h}$ составит

$$h' = \Gamma \cdot h = 3,55 \cdot 0,02 = 0,071 \text{ м.}$$

Задача 1.14

Изображение предмета на экране получают с помощью двояковыпуклой линзы с радиусами кривизны $R_1 = R_2 = R = 12$ см и показателем преломления $n = 1,5$. Определить фокусное расстояние линзы и расстояния от предмета до изображения при увеличениях 1) $\Gamma_1 = 1$, 2) $\Gamma_2 = 20$ и 3) $\Gamma_3 = 0,2$. Ответы пояснить схемами.

Решение

Фокусное расстояние линзы определим, используя формулу (1.7):

$$\frac{1}{f} = (n - 1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right).$$

Преобразуем эту формулу с учетом того, что для двояковыпуклой линзы $R_1 > 0$, $R_2 < 0$, а величины радиусов кривизны $R_1 = R_2 = R$.

$$\frac{1}{f} = (n - 1) \cdot \frac{2}{R}.$$

Тогда фокусное расстояние равно

$$f = \frac{R}{2(n - 1)} = \frac{0,12}{2(1,5 - 1)} = 0,12 \text{ м.}$$

Таким образом, для двояковыпуклой линзы с одинаковыми радиусами кривизны ограничивающих линзу поверхностей главное фокусное расстояние равно радиусу кривизны.

Из формулы тонкой линзы (1.8) $\frac{1}{f} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$. Поэтому

$$(n-1) \cdot \frac{2}{R} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}.$$

$$\frac{a+b}{ab} = \frac{2(n-1)}{R}.$$

Размер изображения h' соотносится с размерами h как $h' = \Gamma h$, где Γ – увеличение линзы. Но увеличение можно выразить и как

$$\Gamma = \frac{b}{a},$$

где a и b – расстояния от линзы до предмета и изображения соответственно.

Поэтому $b = \Gamma a$ и $\frac{a + \Gamma a}{\Gamma a^2} = \frac{2(n-1)}{R}$, откуда

$$a = \frac{R(1+\Gamma)}{2\Gamma(n-1)}.$$

Подстановка численных значений дает

1) для $\Gamma_1 = 1$:

$$a_1 = \frac{R(1+\Gamma_1)}{2\Gamma_1(n-1)} = \frac{0,12(1+1)}{2 \cdot 1(1,5-1)} = 0,24 \text{ м};$$

$$b_1 = \Gamma a_1 = 1 \cdot 0,24 = 0,24 \text{ м};$$

$$a_1 + b_1 = 0,24 + 0,24 = 0,48 \text{ м}.$$

Предмет и его изображение находятся на расстояниях, равных двойному фокусному по разные стороны от оптического центра линзы. Изображение предмета равное, перевернутое, действительное (рис. 1.7, б).

2) для $\Gamma_2 = 20$:

$$a_2 = \frac{R(1 + \Gamma_2)}{2\Gamma_2(n - 1)} = \frac{0,12(1 + 20)}{2 \cdot 20(1,5 - 1)} = 0,126 \text{ м};$$

$$b_2 = \Gamma a_2 = 20 \cdot 0,126 = 2,52 \text{ м};$$

$$a_2 + b_2 = 0,126 + 2,52 = 2,646 \text{ м}.$$

Предмет находится между фокусом и двойным фокусом. Полученное изображение будет увеличенным, перевернутым и действительным и расположено с противоположной стороны линзы за двойным фокусным расстоянием от нее (рис. 1.7, в).

3) для $\Gamma_3 = 0,2$:

$$a_3 = \frac{R(1 + \Gamma_3)}{2\Gamma_3(n - 1)} = \frac{0,12(1 + 0,2)}{2 \cdot 0,2(1,5 - 1)} = 0,72 \text{ м};$$

$$b_3 = \Gamma a_3 = 0,2 \cdot 0,72 = 0,144 \text{ м};$$

$$a_3 + b_3 = 0,72 + 0,144 = 0,864 \text{ м}.$$

Предмет располагается на расстоянии, большем, чем двойное фокусное расстояние ($a_3 > 2f$), поэтому полученное изображение является уменьшенным, перевернутым и действительным (рис. 1.7, а).

Задача 1. 15

Определить, при каком расстоянии от двояковыпуклой линзы до предмета, расстояние между предметом и его действительным изображением будет минимальным.

Решение

Расстояние между предметом и изображением $l = a + b$, где a – расстояние от предмета до линзы, а b – расстояние от линзы до изображения предмета. Выразив b как $b = l - a$, запишем формулу тонкой линзы в виде

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{l-a},$$

$$al - a^2 = fl.$$

Тогда

$$l = \frac{a^2}{a-f}.$$

Рассматривая расстояние между предметом и его изображением l как функцию расстояния от предмета до линзы a , т. е. $l(a)$, найдем производную

$$\frac{dl}{da} = \frac{2a(a-f) - a^2}{(a-f)^2}.$$

Для определения минимального значения приравняем производную нулю:

$$\frac{dl}{da} = \frac{2a(a-f) - a^2}{(a-f)^2} = 0,$$

$$2a(a-f) - a^2 = 0,$$

$$a = 2f.$$

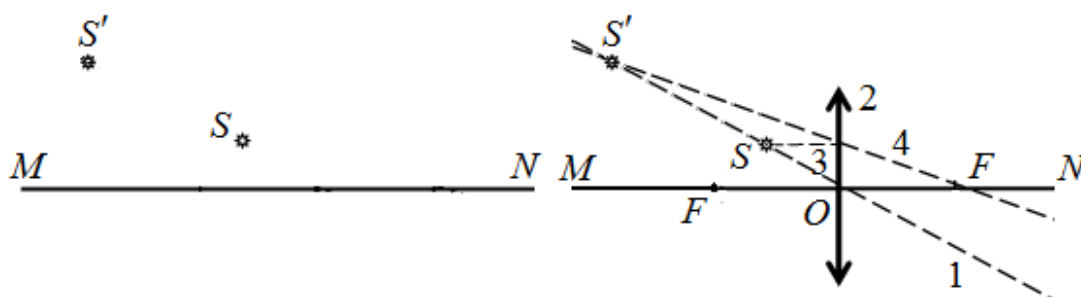
Таким образом, расстояние между предметом и его действительным изображением будет минимальным, если предмет находится в точке двойного фокуса (рис. 1.7, б).

Задача 1.16

На рисунке показаны главная оптическая ось линзы MN и две светящиеся точки, являющиеся источником света S и изображением этого источника в собирающей линзе S' . Найти графически положение линзы и ее фокусов.

Решение

Поскольку точка S и ее изображение S' находятся по одну сторону от собирающей линзы, это означает, что изображение S' является мнимым.



Проведем луч 1, соединяющий точки S и S' , продолжение которого должно пройти через оптический центр линзы – точку O , которая является пересечением луча 1 с главной оптической осью. Плоскость линзы должна быть перпендикулярна главной оптической оси, поэтому прямая 2, проходящая через точку O перпендикулярно MN , соответствует положению линзы на схеме. Луч 3, идущий от источника S параллельно главной оптической оси, пересекает плоскость линзы в точке A . Соединив лучом 4 изображение источника S' и точку A линзы, продолжаем прямую $S'A$ до пересечения с осью MN . Поскольку все лучи после преломления пересекаются в фокусе, то точка пересечения F_2 и есть фокус линзы. Поскольку по обе стороны линзы среда одна и та же, то, отложив в противоположную сторону от точки O расстояние $OF_1 = OF_2$, получим левый фокус линзы.

Задача 1.17

Определить увеличение, которое можно получить при помощи лупы с фокусным расстоянием 2 см, для нормального глаза (расстояние наилучшего зрения $L_1 = 25$ см) и для близорукого глаза (расстояние наилучшего зрения $L_2 = 15$ см).

Решение

Лупа – короткофокусная двояковыпуклая линза. Объект, помещенный между линзой и точкой фокуса, дает увеличенное, прямое, мнимое изображение (рис. 1.7, д).

Линейное увеличение линзы определяется как $\Gamma = \frac{h'}{h} = \frac{b}{a}$, где a и b – расстояния от линзы до предмета и изображения, а h и h' – линейные размеры предмета и изображения, соответственно.

Учитывая, что предмет находится близко к фокусу, можно считать, что $a \approx f$, где f – фокусное расстояние линзы. В свою очередь, поскольку изображение должно располагаться на расстоянии наилучшего зрения для глаза наблюдателя, а лупу обычно подносят очень близко к глазу, то можно считать, что $b \approx L$. Тогда увеличение лупы можно записать как

$$\Gamma \approx \frac{L}{f}.$$

Подставляя в эту формулу численные значения, получим увеличение, которое дает лупа,

- для нормального глаза

$$\Gamma_1 = \frac{L_1}{f} = \frac{0,25}{0,02} = 12,5;$$

- для близорукого глаза

$$\Gamma_2 = \frac{L_2}{f} = \frac{0,15}{0,02} = 7,5.$$

Задача 1.18

Найти радиусы кривизны $R_1 = R_2 = R$ поверхностей, ограничивающих лупу, изготовленную из стекла с показателем преломления $n = 1,5$, если она дает 5-кратное увеличение. Расстояние наилучшего зрения считать равным $L = 25$ см.

Решение

Лупа представляет собой двояковыпуклую линзу. Ее фокусное расстояние из формулы (1.6) с учетом того, что $R_1 = R_2 = R$ и $R_2 < 0$,

$$\frac{1}{f} = (n-1) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \frac{2(n-1)}{R},$$

$$f = \frac{R}{2(n-1)}.$$

С другой стороны, пользуясь результатами задачи 1.17, увеличение лупы

$$\Gamma \simeq \frac{L}{f},$$

откуда фокусное расстояние равно $f = \frac{L}{\Gamma}$.

Приравнявая выражения для фокусных расстояний, получим

$$\frac{R}{2(n-1)} = \frac{L}{\Gamma}.$$

Отсюда радиусы кривизны поверхностей, ограничивающих линзу, равны

$$R_1 = R_2 = R = \frac{2L(n-1)}{\Gamma} = \frac{2 \cdot 0,25(1,5-1)}{5} = 0,05 \text{ м.}$$

Задача 1.19

Определить главное фокусное расстояние и оптическую силу очков для человека, у которого расстояние наилучшего зрения равно $L = 40$ см.

Решение

Полагая, что расстояние от центра глаза до сетчатки равно b , а f – это фокусное расстояние невооруженного глаза (без очков), запишем формулу

тонкой линзы в виде $\frac{1}{L} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$,

Формула тонкой линзы для зрения в очках $\frac{1}{L_0} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f} + \frac{1}{f_{оч}}$, где L_0 – расстояние наилучшего нормального глаза зрения для, а $f_{оч}$ – фокусное

расстояние линзы очков. Подставив значение $\frac{1}{f}$ из первого уравнения во второе уравнение, получим

$$\frac{1}{L_0} + \frac{1}{b} = \frac{1}{L} + \frac{1}{b} + \frac{1}{f_{оч}},$$

$$D = \frac{1}{f} = \frac{1}{L_0} - \frac{1}{L} = \frac{1}{0,25} - \frac{1}{0,4} = 1,5 \text{ дптр.}$$

Задача 1.20

Фокусное расстояние линзы, изготовленной из стекла с показателем преломления $n_{л} = 1,6$, в воздушной среде равно $f_{возд} = 20$ см. Чему равно фокусное расстояние $f_{вода}$ этой линзы воде ($n_{вода} = 1,35$)?

Решение

Используем уравнение шлифовщика линз (1.6)

$$\frac{1}{f} = \left(\frac{n_{линзы}}{n_{среды}} - 1 \right) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right),$$

записав его для двух сред (воздуха и воды):

$$\begin{cases} \frac{1}{f_{возд}} = (n_{л} - 1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right), \\ \frac{1}{f_{вода}} = \left(\frac{n_{л}}{n_{вода}} - 1 \right) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right). \end{cases}$$

Разделим первое уравнение системы на второе и получим

$$\frac{f_{вода}}{f_{возд}} = \frac{(n_{л} - 1)}{\left(\frac{n_{л}}{n_{вода}} - 1 \right)} = \frac{(n_{л} - 1)n_{вода}}{n_{л} - n_{вода}}.$$

Отсюда фокусное расстояние линзы в воде

$$f_{\text{вода}} = \frac{n_{\text{вода}} \cdot f_{\text{возд}} \cdot (n_{\text{л}} - 1)}{n_{\text{л}} - n_{\text{вода}}} = \frac{1,35 \cdot 0,2(1,6 - 1)}{1,6 - 1,35} = 0,648 \text{ м.}$$

Задача 1.21

Определить увеличение микроскопа, если фокусное расстояние объектива $f_{об} = 2$ мм, фокусное расстояние окуляра $f_{ок} = 40$ мм, а расстояние между фокусами объектива и окуляра равно 16 см.

Решение

Микроскоп (рис. 1.14) состоит из двух короткофокусных собирающих линз – объектива, приближенного к объекту наблюдения, и окуляра, расположенного вблизи глаза наблюдателя. Объектив и окуляр микроскопа представляют собой самостоятельные оптические системы, заключенные в отдельные оправы, которые вставлены в металлическую трубку, называемую тубусом микроскопа. Расстояние между объективом и окуляром может меняться. Увеличение микроскопа Γ определяется увеличениями объектива $\Gamma_{об}$ и окуляра $\Gamma_{ок}$, а также расстоянием между передним фокусом окуляра и задним фокусом объектива Δ , которое называется длиной тубуса:

$$\Gamma = \Gamma_{ок} \cdot \Gamma_{об} = \frac{\Delta \cdot L}{f_{об} \cdot f_{ок}},$$

где $L = 0,25$ м – расстояние наилучшего зрения.

Подстановка данных задачи позволяет рассчитать увеличение микроскопа

$$\Gamma = \frac{\Delta \cdot L}{f_{об} \cdot f_{ок}} = \frac{0,16 \cdot 0,25}{0,002 \cdot 0,04} = 500.$$

III. КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

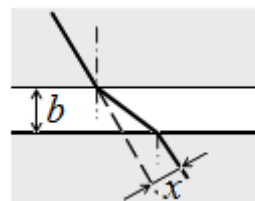
К1.1. На стеклянную пластинку под углом $\alpha = 45^\circ$ падает пучок параллельных световых лучей и после преломления на границе раздела «воздух-стекло» попадает в стекло ($n = 1,5$). Определить ширину b светового пучка в стекле, если его ширина в воздухе составляет $a = 5$ см.

$$\left[b = \frac{a \cos \gamma}{\cos \alpha} = \frac{a \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}}{n \cos \alpha} = 0,062 \text{ м} \right].$$

К1.2. Определить преломляющий угол призмы, изготовленной из стекла ($n = 1,5$), если луч, падающий на одну ее грань нормально, выходит параллельно другой грани? $\left[\varphi = \arcsin\left(\frac{1}{n}\right) = 40,2^\circ \right]$

К1.3. Между стеклянными ($n = 1,5$) параллельными друг другу пластинками находится воздушный зазор шириной $b = 3$ см. Световой луч распространяется в первой пластинке и падает на границу раздела «стекло-воздух» под углом $\alpha = 30^\circ$. На какое расстояние x сместится световой луч, вышедший из щели, относительно продолжения падающего луча?

$$\left[x = b \sin \alpha \left(\frac{n \cos \alpha}{\sqrt{1 - n^2 \sin^2 \alpha}} \right) = 0,011 \text{ м} \right]$$



К1.4. Найти угол падения луча на стеклянную ($n = 1,5$) призму с преломляющим углом $\varphi = 60^\circ$, если он выходит из призмы под тем же углом, под которым падал на противоположную грань. $\left[\alpha = \arcsin \frac{n}{2} = 48,6^\circ \right]$

К1.5. Найти фокусное расстояние и оптическую силу плоско-выпуклой линзы ($n = 1,5$), радиус сферической поверхности которой равен 15 см.

$$\left[f = \frac{R}{n-1} = 0,3 \text{ м}; \quad D = \frac{1}{f} = 3,3 \text{ дптр} \right]$$

К1.6. Очки какой оптической силы следует носить человеку для того, чтобы он читал книгу на расстоянии наилучшего зрения ($L = 25$ см), если он читает книгу на расстоянии $l = 20$ см от глаз? $[D = -1 \text{ дптр}]$

К1.7. Каково расстояние наилучшего зрения для невооруженного глаза, если человек носит очки с оптической силой $D = -2,25$ дптр?

$$\left[l = \frac{L}{DL + 1} = 0,16 \text{ м} \right]$$

К1.8. Фокусное расстояние объектива микроскопа равно $f_{об} = 1$ см, окуляра $f_{ок} = 5$ см. Расстояние от объектива до окуляра $\Delta = 25$ см. Расстояние наилучшего зрения принять равным $L = 25$ см. Какое увеличение Γ дает микроскоп?

$$\left[\Gamma = \frac{\Delta \cdot L}{f_{об} \cdot f_{ок}} = 125 \right]$$

Глава 2.

ВОЛНОВАЯ ОПТИКА. ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ СВЕТА

I. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

В волновой оптике рассматриваются явления, в которых проявляются волновые свойства света. **Свет** – это электромагнитные волны с длинами волн, лежащими в интервале так называемого видимого диапазона от 0,4 до 0,76 мкм (иногда диапазон видимого света указывают в пределах длин волн 0,38–0,78 мкм). В широком смысле светом часто называют любое оптическое излучение, включающее инфракрасную ($\lambda = 0,76 \text{ мкм} - 2 \text{ мм}$) и ультрафиолетовую ($\lambda = 10 - 400 \text{ нм}$) части спектра.

Свет как электромагнитная волна распространяется в вакууме со скоростью $c = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$. Скорость распространения в среде $v < c$ и зависит от физических характеристик этой среды.

1. Оптическая длина пути и оптическая разность хода

Пусть два луча от источника S (рис. 2.1), расположенного на границе раздела двух сред с показателями преломления n_1 и n_2 , распространяется так, что в этих средах он проходит расстояния s_1 и s_2 , соответственно. Расстояния s_1 и s_2 , которые проходит свет от источника S до приемника P , называются **геометрическими длинами пути**.

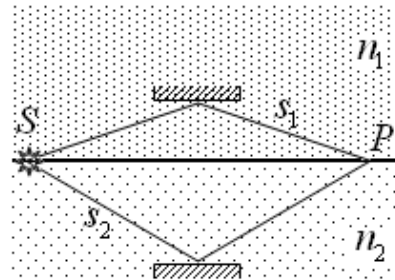


Рисунок 2.1

Оптическая длина пути (L) – величина, равная произведению показателя преломления среды на геометрическую длину пути (s):

$$L = n \cdot s. \quad (2.1)$$

Оптическая разность хода (Δ) – разность оптических длин пути

$$\Delta = L_1 - L_2. \quad (2.2)$$

Оптическая разность хода двух волн связана с разностью фаз ($\Delta\varphi$) двух световых волн соотношением

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \Delta. \quad (2.3)$$

2. Когерентность

Когерентность (от лат. *cohaerentio* – связь, сцепление) – согласованное протекание в пространстве и во времени нескольких колебательных или волновых процессов, при котором разность их фаз остается постоянной. **Когерентными** называются *монохроматические* (т. е. имеющие одинаковую частоту) волны, имеющие постоянную во времени разность фаз.

Волны от независимых источников не когерентны. Источником света является **атом**, в котором переходы электронов с более высоких на более низкие энергетические уровни сопровождаются излучением электромагнитных волн. Естественные источники, состоящие из множества атомов, некогерентны. При сложении волн от двух и более независимых источников разности фаз колебаний светового вектора меняются быстро (излучение атома длится $\sim 10^{-8}$ с) и беспорядочно. Интенсивность, наблюдаемая при наложении некогерентных волн, равна сумме интенсивностей, создаваемых каждой из волн в отдельности.

3. Явление интерференции

При одновременном распространении нескольких волн колебания в некоторой точке среды оказываются геометрической суммой колебаний, которые совершались бы в этой точке при распространении каждой из волн в отдельности. Иначе говоря, волны накладываются друг на друга без смещения (принцип суперпозиции).

Если колебания, обусловленные отдельными волнами в каждой из точек среды, обладают постоянной разностью фаз, т. е. волны являются когерентными, то при их наложении возникает **явление интерференции**.

Пусть волны, идущие от двух близко расположенных источников, в некоторой точке, значительно удаленной от них, вызывают однонаправленные колебания, амплитуда которых

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos \Delta\varphi. \quad (2.4)$$

Так как интенсивность I волн пропорциональна A^2 , то

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \Delta\varphi. \quad (2.5)$$

Положим равными интенсивности I_0 волн, идущих от источников, и тогда результирующая интенсивность может быть вычислена по формуле:

$$I = 2I_0 + 2I_0 \cos \Delta\varphi. \quad (2.6)$$

Найдем интенсивность в тех точках, куда приходят волны с такими разностями хода Δ , для которых косинус разности фаз $\Delta\varphi$ принимает максимальное и минимальное значения ± 1 .

$$1. \cos \Delta\varphi = 1 \Rightarrow \Delta\varphi = \pm 2\pi k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Используя (2.3), получим $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta = \pm 2\pi k$, откуда разность хода равна

$$\Delta = \pm k\lambda = \pm 2k \frac{\lambda}{2}. \quad (2.7)$$

Условие **интерференционного максимума** – точки, где интенсивность $I = 4I_0$, а в оптической разности хода двух когерентных волн должно укладываться **четное** количество полуволн.

$$2. \Delta\varphi = -1 \Rightarrow \Delta\varphi = \pm(2k+1)\pi, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad \Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta = \pm(2k+1)\pi.$$

Разность хода равна

$$\Delta = \pm(2k+1) \frac{\lambda}{2}. \quad (2.8)$$

Условие **интерференционного минимума** – точки, где $I = 0$, а в оптической разности хода двух когерентных волн должно укладываться **нечетное** количество полуволн.

Интерференция – явление перераспределения интенсивности светового потока, возникающее при наложении когерентных волн, в результате которого в одних местах возникают максимумы интенсивности, а в других – минимумы интенсивности.

4. Интерференция от двух источников

Рассмотрим две когерентные волны, идущие от двух источников S_1 и S_2 (рис. 2.2). Найдем координаты точек на экране, расположенном в области перекрытия этих волн (поле интерференции), в которых наблюдаются интерференционные максимумы и минимумы.

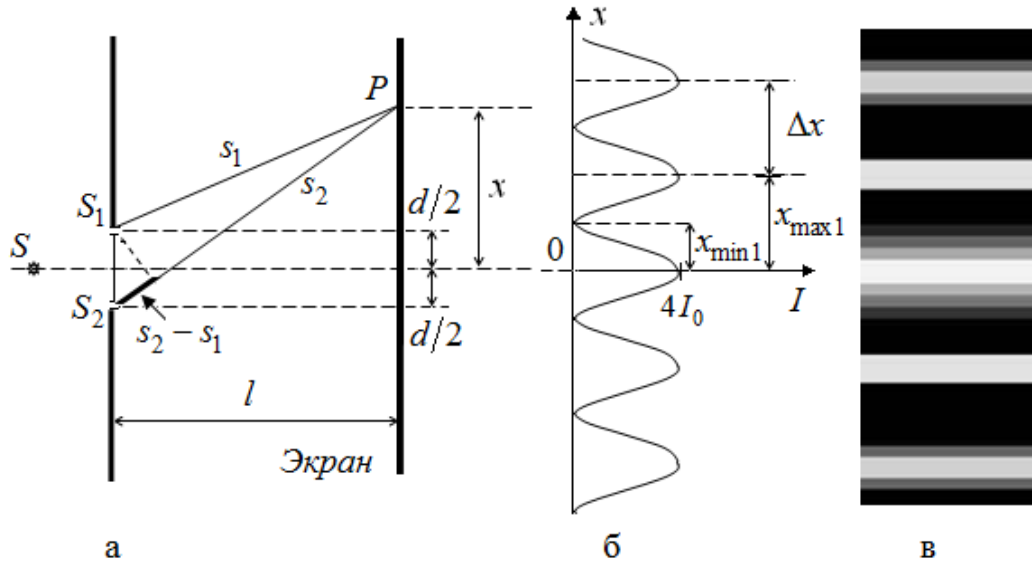


Рисунок 2.2 – Схема эксперимента Юнга (а); распределение интенсивностей на экране (б); интерференционная картина (в)

Обозначим: d – расстояние между источниками, l – расстояние до экрана, x – координаты точки.

$$\begin{cases} s_1^2 = l^2 + \left(x - \left(\frac{d}{2}\right)\right)^2, \\ s_2^2 = l^2 + \left(x + \left(\frac{d}{2}\right)\right)^2, \end{cases}$$

$$s_2^2 - s_1^2 = l^2 + x^2 + xd + \left(\frac{d^2}{4}\right) - l^2 - x^2 + xd - \left(\frac{d^2}{4}\right) = 2xd,$$

$$s_2^2 - s_1^2 = 2xd.$$

Разложим разность квадратов $s_2^2 - s_1^2 = (s_2 + s_1) \cdot (s_2 - s_1)$. Поскольку $d \ll l$ и $x \ll l$, можно считать, что $(s_2 + s_1) \simeq 2l$. Тогда

$$s_2^2 - s_1^2 = (s_2 + s_1) \cdot (s_2 - s_1) \simeq 2l(s_2 - s_1) = 2xd.$$

Умножив обе части выражения $2l(s_2 - s_1) = 2xd$ на показатель преломления n , получим

$$2l \cdot n(s_2 - s_1) = 2l \cdot \Delta = 2nxd.$$

Оптическая разность хода

$$\Delta = \frac{xd}{l}n.$$

Используя условия интерференционных максимумов (2.7) и минимумов (2.8), а также то, что длина волны в вакууме λ_0 и длина волны в среде λ_{cp} связаны с показателем преломления n среды соотношением $\lambda_0 = \frac{\lambda_{cp}}{n}$, получим

- **координаты интерференционных максимумов:**

$$\Delta = \pm 2k \frac{\lambda_0}{2} = \frac{xd}{l}n,$$

$$x_{\max} = \pm 2k \cdot \frac{\lambda_0 \cdot l}{2nd} = \pm 2k \cdot \frac{l}{2d} \cdot \frac{\lambda_0}{n} = \pm 2k \cdot \frac{l \cdot \lambda_{cp}}{2d}; \quad (2.9)$$

- **координаты интерференционных минимумов:**

$$\Delta = \pm (2k + 1) \frac{\lambda_0}{2} = \frac{xd}{l}n,$$

$$x_{\min} = \pm (2k + 1) \cdot \frac{\lambda_0 \cdot l}{2nd} = \pm (2k + 1) \cdot \frac{l}{2d} \cdot \frac{\lambda_0}{n} = \pm (2k + 1) \cdot \frac{l \cdot \lambda_{cp}}{2d}. \quad (2.10)$$

Расстояние между двумя соседними максимумами (минимумами) – **ширина интерференционной полосы**

$$\Delta x = x_{\max 1} - x_{\max 0} = \frac{\lambda_0 \cdot l}{dn} = \frac{\lambda_{cp} l}{d}. \quad (2.11)$$

Эта формула позволяет вычислять длины волн по интерференционной картине.

5. Принцип Гюйгенса. Реальные интерференционные схемы

В 1678 году нидерландский физик и математик Христиан Гюйгенс (1629–1695) сформулировал принцип, являющийся основополагающим в волновой теории и объясняющий механизм распространения волн.

Принцип Гюйгенса: каждая точка волнового фронта является источником вторичных волн, а огибающая этих волн дает положение волнового фронта через интервал времени Δt .

На рис. 2.3 приведены формы волнового фронта для сферической и плоской волн. Все точки, являющиеся центрами распространения волн находятся на одной волновой поверхности, а, значит, колеблются в одинаковой фазе. Следовательно, согласно идее Гюйгенса (рис. 2.4, а), эти точки – источники когерентных волн.

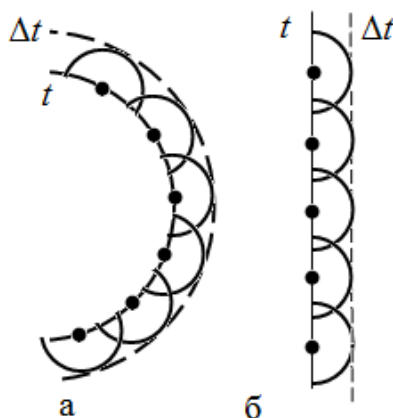


Рисунок 2.3 – Положения волнового фронта для сферической (а) и плоской (б) волн

Для получения интерференционной картины необходимо иметь два (или более) когерентных источника. Но естественные источники не являются когерентными, поэтому для реализации явления интерференции необходимо «заставить волну интерферировать саму с собой», т. е. обеспечить ее разделение на части с помощью зеркал, щелей, преломляющих тел и пр. Все методы получения когерентных волн базируются на двух основных принципах.

1. Интерференция волн, полученных *делением волнового фронта*.

Когда волны распространяются от точечного источника в среде, где скорость волны одинакова во всех направлениях, во всех точках, равноудаленных от источника, фазы колебаний одинаковы в данный момент

времени, т. е. эти точки принадлежат одному волновому фронту. Волновой фронт имеет форму сферы с центром в точке, где расположен источник. Если источник находится на большом удалении от волнового фронта, то сфера имеет очень большой радиус, т. е. практически является плоскостью. Далее описаны AB схемы, позволяющие разделить волновой фронт.



Рисунок 2.4 – Христиан Гюйгенс (а), Томас Юнг (б)

а) Двухщелевой метод Юнга

Метод был предложен в 1803 г. английским физиком Томасом Юнгом (1773–1829) (рис. 2.4, б). Волна, идущая от источника S (рис. 2.5), проходит через две щели S_1 и S_2 , расположенные симметрично относительно центральной линии AB и столь близко друг к другу, что оказываются на одном волновом фронте. В соответствии с принципом Гюйгенса каждая точка волнового фронта есть источник вторичных волн, являющихся когерентными. Поэтому щели S_1 и S_2 можно считать источниками когерентных волн. Интерференционная картина на экране есть результат наложения когерентных волн, прошедших разные расстояния до различных точек экрана и имеющих вследствие этого различные оптические разности хода, определяющие результат интерференции в каждой точке (рис. 2.5).

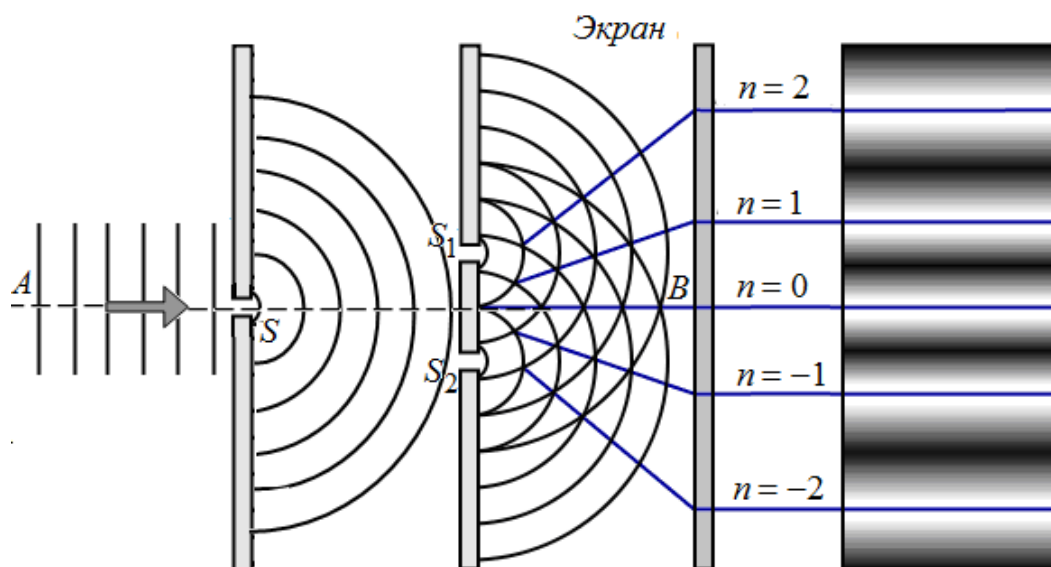


Рисунок 2.5 – Двухщелевой метод Юнга



Рисунок 2.6 – Огюст Френель

б) Бизеркала Френеля

Эта интерференционная схема была предложена французским физиком Огюстом Френелем (1788–1827) в 1816 г. (рис. 2.6). В ней две когерентные световые волны получаются в результате отражения света от источника S от двух зеркал M и N , которые образуют угол, близкий к 180° (рис. 2.7, а). Источник S отгорожен от экрана шторкой, поэтому на экран попадают только волны, идущие от мнимых изображений источника в зеркалах S_1 и S_2 , которые формируют интерференционную картину в той области на экране, где они перекрываются (в поле интерференции).

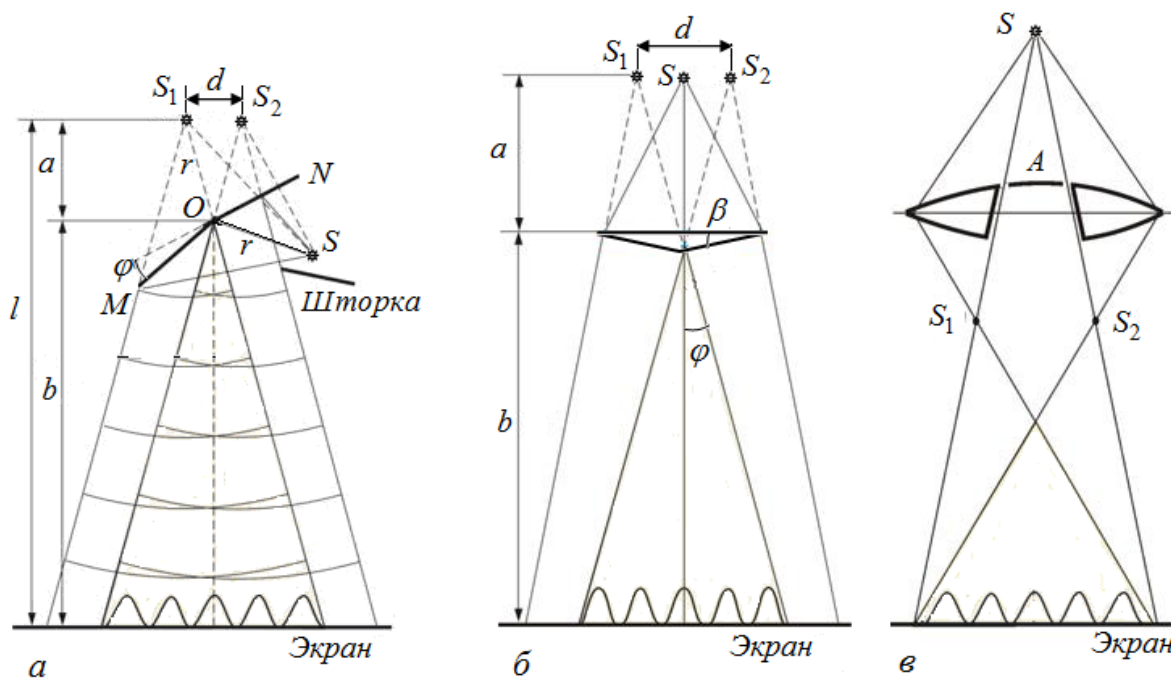


Рисунок 2.7 - Бизеркала Френеля (а), бипризма Френеля (б), билинза Бийе (в)

Если используется монохроматический свет с длиной волны λ , расстояние между мнимыми источниками $d \approx 2a\varphi$, расстояние от мнимых источников до экрана $l = a + b$, где $a \approx r$ – расстояние от источника S , а b – расстояние от точки контакта зеркал до экрана, тогда **ширина интерференционной полосы** на экране равно

$$\Delta x \approx \frac{\lambda l}{d} = \frac{\lambda(a+b)}{2a\varphi}. \quad (2.12)$$

в) **Бипризма Френеля**

В схеме (рис. 2.7, б), также предложенной О. Френелем, мнимые когерентные источники S_1 и S_2 возникают в результате преломления лучей от источника S в равносторонней бипризме с углом при вершине близким к 180° . В результате свет от двух мнимых источников когерентного излучения формирует интерференционную картину на экране.

г) **Билинза Бийе**

Свет от источника S падает на собирающую линзу (рис. 2.7, в), разрезанную по диаметру пополам. Половинки линзы раздвигаются, и прорезь закрывается непрозрачным материалом A . В результате преломления света в линзе получаются два изображения источника, играющих роль когерентных источников, формирующих интерференционную картину.

д) **Зеркало Ллойда**

В опыте, впервые описанном ирландским ученым Х. Ллойдом (1800–1881) в 1834 г., свет от источника монохроматического излучения, расположенного под небольшим углом к зеркалу, он отражался от зеркала и интерферировал со светом, идущим непосредственно от источника (рис. 2.8). Интерференционная картина создается двумя источниками – реальным и его мнимым изображением.

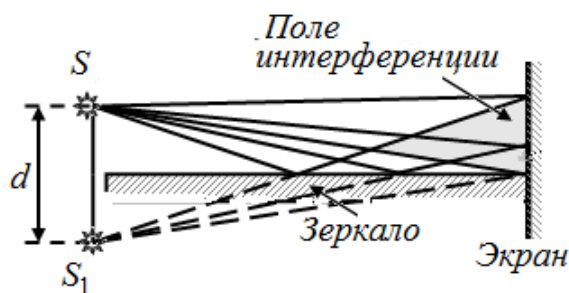


Рисунок 2.8 – Зеркало Ллойда

2. Интерференция волн, полученных **делением амплитуды**

Стабильная интерференционная картина может быть также получена, если падающий луч частично отражается от верхней, а частично – от нижней поверхности тонкого прозрачного материала. Каждая отраженная волна имеет меньшую интенсивность и поэтому меньшую амплитуду, чем падающая волна. Будучи получены из одной падающей волны, отраженные волны имеют одинаковую частоту и постоянную разность фаз. Такая интерференционная картина наблюдается в тонких пленках. Подробный анализ интерференционных картин в тонких плоскопараллельных и клинообразных пленках представлен далее.

6. Интерференция в тонких пленках

1. Плоскопараллельная тонкая пленка

При падении световой волны под углом α на тонкую прозрачную пленку с коэффициентом преломления n и толщиной b волна частично отражается, а частично преломляется, входит в пленку, отражается от нижней поверхности, снова преломляется и выходит из пленки (рис. 2.9). Луч $1'$ как результат отражения луча 1 в точке C и луч $2'$, являющийся результатом прохождения луча 2 в тонкой пленке и вышедший из нее после преломления в точке C , являются когерентными и могут интерферировать. Вид интерференционной картины зависит от их разности хода.

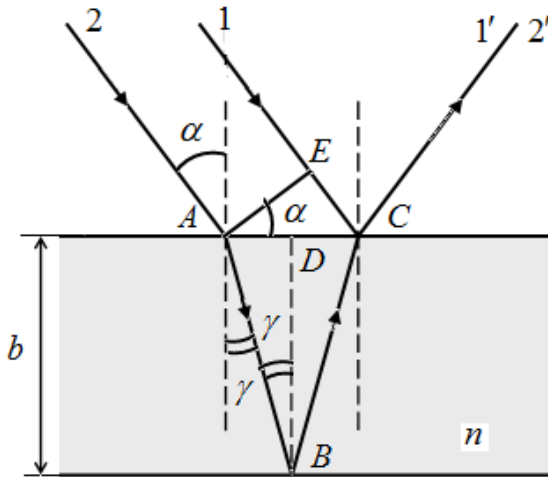


Рисунок 2.9 – Интерференция в тонкой плоскопараллельной пленке

Определим эту оптическую разность хода для тонкой плоскопараллельной пластинки (пленки).

Первый луч распространялся в воздухе $n_{\text{возд}} = 1$, поэтому для него оптическая длина пути равна геометрической длине пути $EC = s_1$. Второй луч распространялся в веществе с показателем преломления n , поэтому для него оптическая длина пути $n \cdot (AB + BC) = ns_2$. Таким образом, оптическая разность хода, равная разности оптических

длин пути, составляет $\Delta = ns_2 - n_{\text{возд}}s_1 = ns_2 - s_1$.

$$\text{Из } \triangle ADB: \quad AB = \frac{DB}{\cos \gamma} = \frac{b}{\cos \gamma}, \quad s_2 = 2 \cdot AB = \frac{2b}{\cos \gamma}$$

$$AD = BD \cdot \operatorname{tg} \gamma = b \cdot \operatorname{tg} \gamma, \quad AC = 2AD = 2b \cdot \operatorname{tg} \gamma.$$

$$\text{Из } \triangle AEC: \quad s_1 = EC = AC \sin \alpha = 2b \cdot \operatorname{tg} \gamma \cdot \sin \alpha$$

$$s_1 = 2b \cdot \operatorname{tg} \gamma \cdot \sin \alpha; \quad s_2 = \frac{2b}{\cos \gamma}.$$

Тогда оптическая разность хода равна

$$\Delta = \frac{2bn}{\cos \gamma} - 2b \cdot \operatorname{tg} \gamma \cdot \sin \alpha = 2b \cdot \frac{(n - \sin \gamma \cdot \sin \alpha)n}{(\cos \gamma)n} = 2b \cdot \frac{n^2 - n \cdot \sin \alpha \cdot \sin \gamma}{n \cdot \cos \gamma}.$$

Из закона отражения $\frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} = n_{21} = \frac{n}{n_{\text{возд}}} = n$, откуда $n \cdot \sin \gamma = \sin \alpha$. По-

скольку

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \gamma}, \text{ то } n \cdot \cos \gamma = \sqrt{n^2 - n^2 \sin^2 \gamma} = \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}.$$

Тогда
$$\Delta = 2b \cdot \frac{n^2 - \sin^2 \alpha}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}} = 2b \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}.$$

Падающая волна в точке падения частично отражается от оптически более плотной среды, а, значит, ее фаза меняется на π . По формуле

$\Delta \varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \Delta$, связывающей оптическую разность фаз с оптической раз-

ностью хода, получаем $\pi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta'$, откуда находим дополнительную разность

хода $\Delta' = \frac{\lambda}{2}$, которую необходимо учесть в общей разности хода.

Тогда **разность хода**, которую приобретают волны при падении света на тонкую плоскопараллельную пленку

$$\Delta = 2b \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} \pm \frac{\lambda}{2}. \quad (2.13)$$

Условия интерференции будут одинаковы для лучей с углом падения α , т. е. имеющих одинаковый угол наклона к поверхности пленки. Поэтому интерференционная картина в случае плоскопараллельной пластины называется **полосы равного наклона**.

2. Интерференция на клине

Пусть на тонкую пленку (рис. 2.10) в виде клина, показатель преломления материала которой n , падает свет под углом α . Он частично отражается в точке B (луч R_1), а частично преломляется (угол преломления γ),

затем отражается на нижней грани пленки в точке C , выходит из пленки в точке D (луч R_2). Лучи R_1 и R_2 , полученные из одного луча за счет отражений и преломлений, являются когерентными, а, следовательно, при наложении дают интерференционную картину. Определим условия интерференции, а, именно, посчитаем оптическую разность хода для интерферирующих лучей $\Delta = n(BC + CD) - BF$.

$$\text{Из } \triangle BFD \quad \sin \alpha = \frac{BF}{BD}.$$

В $\triangle BED$ $\angle BDE = \gamma$ (как углы с взаимно перпендикулярными сторонами), а, значит, $\sin \gamma = \frac{BE}{BD}$.

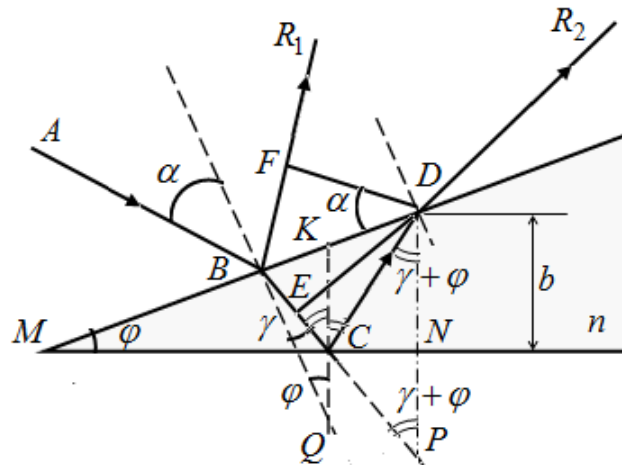


Рисунок 2.10 – Интерференция в тонкой клиновидной пленке

$$\text{Тогда из закона преломления } n = \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} = \frac{BF \cdot BD}{BD \cdot BE} = \frac{BF}{BE} \text{ и } BF = n \cdot BE.$$

$$\text{Оптическая разность хода } \Delta = n(BE + EC + CD) - nBE = n(EC + CD).$$

Угол $\angle BQC = \angle BMC = \varphi$, $\angle BCK = \gamma + \varphi$ (как внешний угол $\triangle BKQ$ при вершине C).

По закону отражения угол падения на нижнюю грань равен углу отражения от этой грани, т. е., при этом, $\angle KCD = \angle CDP$ (как накрест лежащие между параллельными прямыми KQ и DP и секущей CD). С учетом этого,

$$\Delta = n(EC + CD) = n(EC + CP) = n \cdot EP.$$

Так как $\angle CDP + \angle CPD = \gamma + \varphi$, то треугольник $\triangle PCD$ – равнобедренный, и в нем $PN = ND = b$ и $PD = 2b$.

Из $\triangle EDP$ $EP = PD \cdot \cos \angle EDP = 2b \cdot \cos(\gamma + \varphi)$.

И, окончательно, с учетом дополнительной разности хода, связанной с отражением, получим, что оптическая разность хода при отражении на клине

$$\Delta = 2bn \cdot \cos(\gamma + \varphi) \pm \frac{\lambda}{2}. \quad (2.14)$$

Для тонкой пленки в виде клина с очень малым углом при вершине φ одинаковые условия интерференции будут для одинаковых толщин пленки, поэтому соответствующую интерференционную картину называют **полосы равной толщины**. Примером такой картины являются **кольца Ньютона**.

7. Кольца Ньютона

Свет нормально падает на плоско-выпуклую линзу с радиусом кривизны R , лежащую выпуклой стороной на плоской поверхности (рис. 2.11, а).

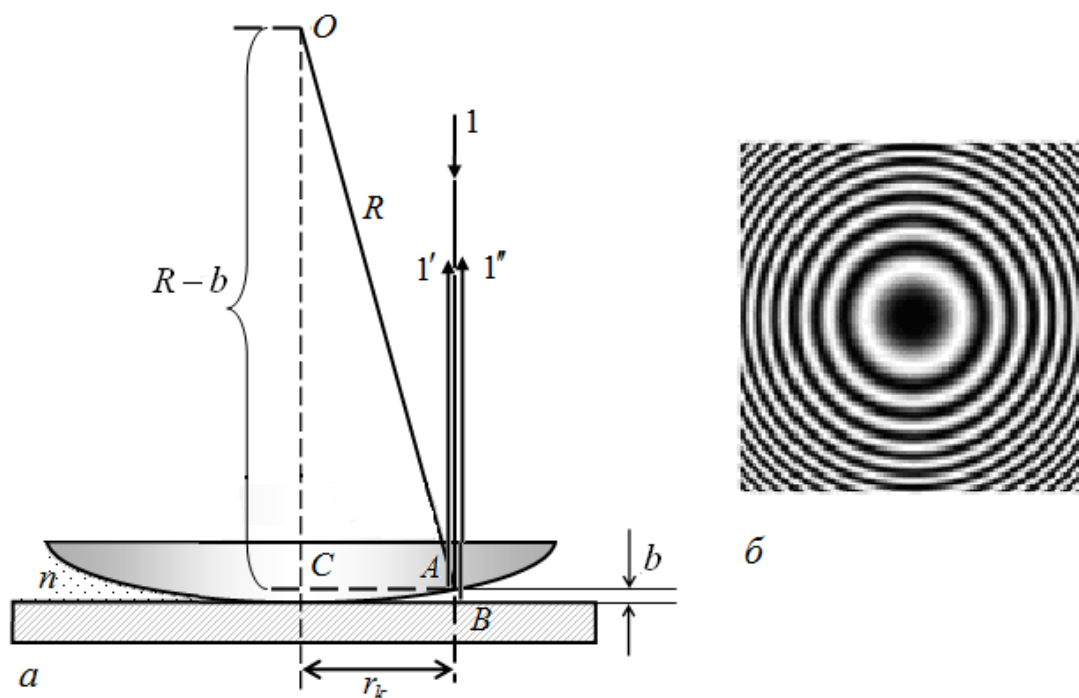


Рисунок 2.11 – Кольца Ньютона: схема установки (а) и интерференционная картина (б)

Получающаяся интерференционная картина имеет вид чередующихся темных и светлых концентрических окружностей – колец Ньютона (при наклонном падении – эллипсов) (рис. 2.11, б). Роль тонкой пленки переменной толщины играет зазор между линзой и пластинкой, на которой лежит линза. В общем случае в этом зазоре может находиться прозрачное вещество с показателем преломления n или воздух. Падающий луч (1) частично отражается в точке A (луч $1'$), частично проходит зазор AB и отражается в точке B (луч $1''$). Если наблюдать кольца Ньютона в отраженном свете, то оптическая разность хода равна удвоенной ширине зазора (b), умноженной на показатель преломления (n) той среды, которой заполнен этот зазор, т. е. $2bn$. За счет отражения световой волны в точке A к разности хода необходимо добавить полуволну. Окончательно, разность хода составляет $\Delta = 2bn + \frac{\lambda}{2}$.

$$\text{Из } \triangle COA \quad R^2 = (R - b)^2 + r^2 = R^2 - 2Rb + b^2 + r^2.$$

Пренебрегая величиной b^2 , т. к. $b \ll R$ и $b \ll r$, выразим ширину зазора через радиус кольца Ньютона:

$$b = \frac{r^2}{2R}. \quad (2.15)$$

Радиусы светлых колец получим, используя условие интерференционного максимума $\Delta = 2k \cdot \frac{\lambda}{2}$:

$$2bn + \frac{\lambda}{2} = 2k \frac{\lambda}{2}, \quad 2bn = \frac{2nr^2}{2R} = (2k - 1) \frac{\lambda}{2}.$$

$$\text{Радиусы светлых колец} \quad r_k = \sqrt{\frac{(2k - 1)R\lambda}{2n}}. \quad (2.16)$$

Радиусы темных колец получим, используя условие интерференционного минимума $\Delta = (2k + 1) \cdot \frac{\lambda}{2}$:

$$2bn + \frac{\lambda}{2} = (2k + 1) \frac{\lambda}{2}, \quad 2bn = \frac{2nr^2}{2R} = 2k \frac{\lambda}{2}.$$

Радиусы темных колец

$$r_k = \sqrt{\frac{kR\lambda}{n}}. \quad (2.17)$$

Впервые эту интерференционную картину наблюдал великий английский физик и математик Исаак Ньютон (1643–1727) в 1717 г. При освещении монохроматическим светом он обнаружил, что радиус колец возрастает с увеличением длины волны, а при освещении белым светом светлые кольца имеют радужную окраску (при этом цвет меняется по мере возрастания расстояния от центра от фиолетового до красного). Удовлетворительно объяснить причину возникновения колец Ньютон не смог, но это удалось Т. Юнгу.

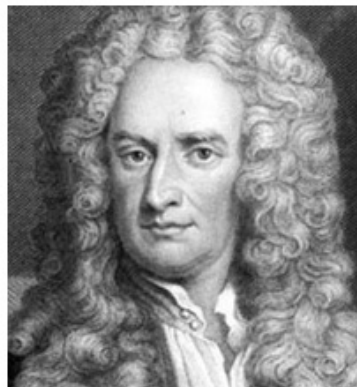


Рисунок 2.12 – Исаак Ньютон

8. Применение интерференции

1. Интерференционные схемы позволяют *определять длину волны* (интерференционная спектроскопия).

2. Просветленная оптика

Для уменьшения потерь света при отражении в оптических системах передняя поверхность линзы покрывается прозрачной пленкой с показателем преломления меньшим, чем показатель преломления вещества линзы. Свет отражается дважды: на границе «воздух-пленка» и «пленка-линза». Толщина пленки и ее показатель преломления подбираются так, чтобы отраженные лучи «гасили» друг друга (т. е. были в противофазе). При этом исчезают так называемые блики.

Поскольку добиться одновременного гашения для всех длин волн видимого спектра невозможно, то условие гашения выполняется для наиболее воспринимаемых человеческим глазом длин волн ($\lambda \sim 555$ нм).

3. Создание *высокоотражающих покрытий*. В этом случае используют тонкую пленку из материала, абсолютный показатель преломления которого больше абсолютного показателя преломления стекла. В этом случае отражение от передней поверхности пленки происходит с потерей полуволны, так как показатель преломления пленки меньше показателя преломления воздуха, а отражение от задней границы – без потери полуволны. В результате отраженные волны усилят друг друга.

4. *Определение и контроль качества* оптических изделий – установки для наблюдения колец Ньютона.

5. *Прецизионные* (очень точные) измерения.

Для измерения линейных размеров, малых расстояний и перемещений, а также для контроля качества поверхности – интерферометры и интерференционные компараторы; для измерения температурных коэффициентов линейного расширения – интерференционные дилатометры; для измерения показателей преломления – интерференционные рефрактометры.

Одним из крупнейших специалистов по разработке оптических приборов и их применению для физических исследований был Альберт Майкельсон (1852–1931) (рис. 2.13, а). Он создал прибор для прецизионных измерений, названный интерферометр Майкельсона и провел известнейший опыт по измерению скорости света и совместно с Морли эксперимент, ставший одним из подтверждений теории относительности. За свои успехи в исследованиях в области оптики А. Майкельсон стал первым американским лауреатом Нобелевской премии по физике в 1907 г.

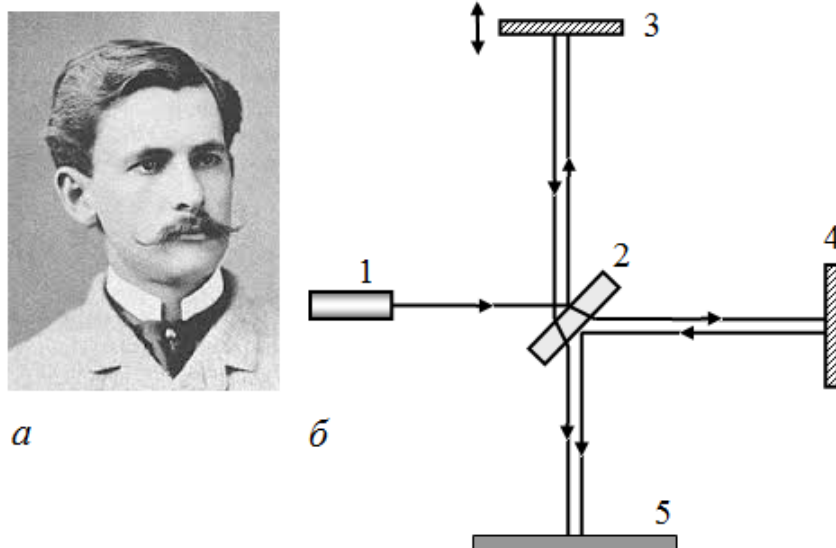


Рисунок 2.13 – А. Майкельсон (а), схема интерферометра (б)

В *интерферометре Майкельсона* (рис. 2.13, б) луч лазера (1) разделяется на два луча с помощью полупрозрачного зеркала (2), установленного под углом 45° к направлению луча. Один из лучей отражается от подвижного зеркала (3), возвращается к полупрозрачному зеркалу и, пройдя через него, попадает на экран (5). Второй луч после преломления в (2) отражается от фиксированного зеркала (4) и после отражения также попадает на

экран (5), где интерферирует с первым лучом, поскольку лучи являются когерентными. Интерференционная картина зависит от разности хода, которую лучи приобретают при своем раздельном распространении в приборе. По незначительному смещению интерференционной картины можно судить о малом перемещении одного из зеркал и использовать интерферометр для достаточно точных ($\sim 10^{-4}$ м) измерений длин (длины тел, длины световой волны), определения температурного коэффициента линейного расширения и др.

6. Явление интерференции лежит в основе *голографии* (др.-греч. ὅλος – полный + γράφω – пишу) – способа получения объемных изображений предметов на фотопластинке (голограмме) при помощи когерентного излучения. Голограмма фиксирует не само изображение, а структуру отраженной от предмета световой волны (ее амплитуду и фазу). Голографию изобрел (и придумал название) английский физик венгерского происхождения Деннис Габор (1900–1987) в 1947 г., получивший за это в 1971 г. Нобелевскую премию по физике. В 1962 г. после появления мощного источника когерентного света – лазера – американские оптики и радиофизики Эммет Лейт (1927–2005) и Дж. Юрис Упатниекс (род. 1936) усовершенствовали схему Габора. Позднее российский физик Юрий Николаевич Денисюк (1927–2006) создал принципиально новый способ записи голограмм в толстом слое фотографической эмульсии.

Голография широко применяется в науке и технике. Голографическими методами контролируют точность изготовления изделий сложной формы, исследуют деформации и вибрации, изучают обтекание тел потоками жидкости и газа, поскольку голограммы позволяют не только увидеть в них вихри и области уплотнений, но и оценить их интенсивность. Голографическими методами можно распознавать образы. Голограммы музейных редкостей экспонируются на выставках. Кроме того, голограммы используются для производства сувенирной продукции, акцизных марок и различных элементов защиты документов.

II. ЗАДАЧИ

Задача 2.1

Свет с длиной волны $\lambda = 600$ нм переходит из воздуха в стекло. Как изменятся скорость, частота, длина волны и цвет света?

Решение

Частота волны является ее неизменной характеристикой, которая не изменяется при переходе волны из одного вещества в другое, включая вакуум (воздух). С учетом того, что длина волны в воздухе λ такая же, как и в вакууме, найдем частоту, которая составляет

$$\nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{3 \cdot 10^8}{6 \cdot 10^{-7}} = 5 \cdot 10^{14} \text{ Гц.}$$

Показатель преломления вещества есть отношения длин волн в вакууме и веществе, т. е. $n_c = \frac{\lambda}{\lambda_c}$, а показатель преломления стекла $n_c = 1,5$, тогда длина волны в стекле

$$\lambda_c = \frac{\lambda}{n_c} = \frac{6 \cdot 10^{-7}}{1,5} = 4 \cdot 10^{-7} \text{ м.}$$

Скорость волны в стекле определим из выражения $\lambda_c = \frac{v}{\nu}$, откуда

$$v = \lambda_c \nu = 4 \cdot 10^{-7} \cdot 5 \cdot 10^{14} = 2 \cdot 10^8 \text{ м/с.}$$

Цвет света не изменится, поскольку он определяется частотой света, а она остается неизменной.

Задача 2.2

Определить длину отрезка d_1 в воде ($n_1 = 1,33$), на котором укладывается столько длин волн, сколько их укладывается на отрезке $d_2 = 5$ мм в стекле ($n_2 = 1,5$).

Решение

Отношение длины волны в вакууме λ к длине волны в веществе равняется абсолютному показателю преломления n этого вещества. Поэтому длина волны в стекле определяется как $\lambda_2 = \frac{\lambda}{n_2}$. Учитывая это, число длин волн, что укладывается на отрезке d_2 в стекле, составляет

$$k = \frac{d_2}{\lambda_2} = \frac{d_2 n_2}{\lambda}.$$

Длина волны в воде $\lambda_1 = \frac{\lambda}{n_1}$. Тогда длина отрезка, на котором укладывается k длин волн в воде, равняется

$$d_1 = k \lambda_1 = \frac{d_2 n_2}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{n_1} = \frac{d_2 n_2}{n_1} = \frac{5 \cdot 10^{-3} \cdot 1,5}{1,33} = 5,64 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

Задача 2.3

Когерентные лучи с длинами волн 404 нм пересекаются в точках на экране. Что будет наблюдаться в этих точках (усиление или ослабление света), если оптическая разность хода лучей составляет: 1) для первой точки – 17,17 мкм; 2) для второй точки – 12,12 мкм?

Решение

Условия наблюдения интерференционных максимумов $\Delta = \pm 2k \frac{\lambda}{2}$ и минимумов $\Delta = (2k + 1) \frac{\lambda}{2}$ можно записать в общем виде:

$$\Delta = \pm m \frac{\lambda}{2},$$

где m – это четное число для максимума ($m = 2k$) и нечетное – для минимума ($m = 2k + 1$).

1) Определим m для первого случая:

$$m = \frac{2\Delta}{\lambda} = \frac{2 \cdot 17,17 \cdot 10^{-6}}{404 \cdot 10^{-9}} = 85.$$

В результате мы получили нечетное число.

$$2k + 1 = 85,$$

$$k = 42.$$

Это значит, что в первой точке наложения лучей наблюдается 42-й интерференционный минимум.

2) Для второго случая:

$$m = \frac{2\Delta}{\lambda} = \frac{2 \cdot 12,12 \cdot 10^{-6}}{404 \cdot 10^{-9}} = 60.$$

$$2k = 60,$$

$$k = 30.$$

Результат – четное число, следовательно, во второй точке, где накладываются лучи, будет 30-й интерференционный максимум.

Задача 2.4

В установке Юнга (рис 2.2) расстояние между щелями $d = 1,5$ мм, а экран расположен на расстоянии $l = 2$ м от щелей. Определить расстояние между интерференционными полосами на экране, если длина волны монохроматического света $\lambda = 670$ нм.

Решение

Расстояние между интерференционными полосами (или ширина интерференционной полосы) вычисляется по формуле

$$\Delta x = \frac{\lambda \cdot l}{n \cdot d}.$$

С учетом того, что установка Юнга расположена в воздушной среде, показатель преломления которой $n = 1$, получим

$$\Delta x = \frac{\lambda \cdot l}{d} = \frac{670 \cdot 10^{-9} \cdot 2}{1,5 \cdot 10^{-3}} = 8,9 \cdot 10^{-4} \text{ м.}$$

Задача 2.5

Падая на две щели, которые расположены на расстоянии $d = 0,5$ мм друг от друга, монохроматический свет создает полосу четвертого порядка под углом $\varphi = 0,2^\circ$. Определить длину волны падающего света.

Решение

Ввиду того, что расстояние от щелей к экрану намного больше, чем расстояние между щелями, углы φ_1 и φ_3 , которые образуют лучи, идущие от щелей к четвертому интерференционному максимуму, можно считать равными. Кроме того, они равняются углу φ_2 между осью симметрии схемы и направлением на четвертый максимум. Таким образом, $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3$. К тому же, $\varphi = \varphi_1$, поскольку они являются углами со взаимно перпендикулярными сторонами.

Щели можно рассматривать как два когерентных источника. Разность хода лучей, которые идут от них, равна

$$\Delta = d \cdot \sin \varphi.$$

Из условия наблюдения интерференционного максимума

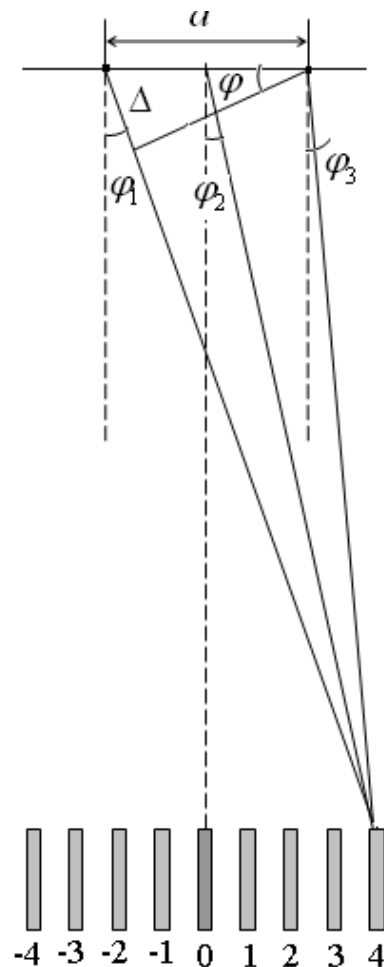
$$\Delta = 2k \frac{\lambda}{2} = k\lambda.$$

Тогда, приравняв правые части двух последних формул, получим

$$d \cdot \sin \varphi = k\lambda,$$

откуда длина волны равняется

$$\lambda = \frac{d \sin \varphi}{k} = \frac{0,5 \cdot 10^{-3} \cdot \sin 0,2^\circ}{4} = 4,36 \cdot 10^{-7} \text{ м.}$$



Задача 2.6

В сколько раз увеличится расстояние между соседними интерференционными полосами на экране в опыте Юнга, если зеленый ($\lambda_1 = 500$ нм) светофильтр заменить красным ($\lambda_2 = 650$ нм)?

Решение

Расстояние между двумя соседними максимумами (минимумами) – ширина интерференционной полосы – определяется по формуле

$$\Delta x = \frac{\lambda \cdot l}{d}.$$

Исходя из этого, если условия опыта (расстояние между щелями и расстояние до экрана) остаются неизменными, а меняется только длина волны, то изменение расстояния между соседними полосами составит

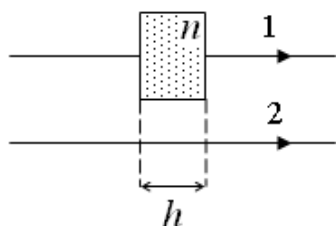
$$\frac{\Delta x_1}{\Delta x_2} = \frac{\lambda_1 l d}{d \lambda_2 l} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{500}{650} = 0,77.$$

Задача 2.7

В опыте Юнга на пути одного из лучей, которые участвуют в интерференции, помещают тонкую стеклянную пластинку, в результате чего центральная светлая полоса смещается в положение, первоначально занятое пятой светлой полосой (не считая центральной). Луч падает перпендикулярно поверхности пластинки. Показатель преломления пластинки $n = 1,5$. Длина волны $\lambda = 600$ нм. Определить толщину стеклянной пластинки.

Решение

Получение светлой полосы на экране (интерференционный максимум) определяется оптической разностью хода, которую имеют две интерферирующие волны. Условие наблюдения максимума



$$\Delta = \pm 2k \frac{\lambda}{2} = \pm k \lambda, \quad \text{где } k = 0, 1, 2, \dots$$

Поэтому для пятой светлой полосы

$$\Delta_5 = k\lambda = 5\lambda.$$

Если на пути одного из интерферирующих лучей находится пластина толщиной h , сделанная из материала с показателем преломления n , то разность хода

$$\Delta = n \cdot h - h = (n - 1)h.$$

Эта разность хода равняется разности хода, определяющей появление пятой светлой полосы. Поэтому из $\Delta_5 = \Delta$, получим $5\lambda = (n - 1)h$, откуда

$$h = \frac{5\lambda}{n - 1} = \frac{5 \cdot 600 \cdot 10^{-9}}{1,5 - 1} = 6 \cdot 10^{-6} \text{ м.}$$

Задача 2.8

На мыльную пленку ($n = 1,33$) падает белый свет под углом 30° к поверхности пленки. При какой наименьшей толщине пленки отраженные лучи будут окрашены в желтый цвет, если длина волны желтого света $\lambda = 600 \text{ нм}$?

Решение

Если свет падает под углом 30° к поверхности пленки, то угол падения $\alpha = 60^\circ$, поскольку он отсчитывается от нормали, проведенной в точку падения луча. Оптическая разность хода при интерференции в тонких пленках равна $\Delta = 2b\sqrt{n^2 - \sin^2 \vartheta_1} \pm \frac{\lambda}{2}$.

Поскольку отраженные лучи окрашены, то это означает, что выполняется условие интерференционного максимума, то есть в оптической разности хода должно укладываться четное количество полуволн. Тогда

$$2b\sqrt{n^2 - \sin^2 \vartheta_1} - \frac{\lambda}{2} = 2k \frac{\lambda}{2}.$$

Откуда

$$b = \frac{(2k + 1)\lambda}{4\sqrt{n^2 - \sin^2 \vartheta_1}}.$$

Минимальной толщине пленки соответствует $k = 0$:

$$b = \frac{\lambda}{4\sqrt{n^2 - \sin^2 \vartheta}} = \frac{600 \cdot 10^{-9}}{4\sqrt{1,33^2 - 0,866^2}} = 1,48 \cdot 10^{-7} \text{ м.}$$

Задача 2.9

Пучок белого света падает по нормали к поверхности стеклянной пластинки толщиной $b = 0,4$ мкм. Показатель преломления стекла $n = 1,5$. Какие длины волн, лежащих в пределах видимого спектра (400 – 700 нм), усиливаются в отраженном свете?

Решение

Оптическая разность хода при нормальном падении лучей на плоскопараллельную пластинку с учетом дополнительной разности хода $\Delta' = \pm \lambda/2$, которая связана с отражением лучей от верхней поверхности пленки, составляет $\Delta = 2bn \pm \frac{\lambda}{2}$. Условие наблюдения интерференционного максимума $\Delta = \pm 2k \frac{\lambda}{2}$. Приравняв правые части этих выражений и получим

$$2bn - \frac{\lambda}{2} = 2k \frac{\lambda}{2},$$

$$2bn = (2k + 1) \frac{\lambda}{2},$$

откуда

$$\lambda = \frac{4bn}{2k + 1},$$

где $k = 0, 1, 2, \dots$

Рассчитаем длины волн для разных значений k :

$$k = 0 \quad \lambda = 4bn = 4 \cdot 0,4 \cdot 10^{-6} \cdot 1,5 = 2,4 \cdot 10^{-6} \text{ м,}$$

$$k = 1 \quad \lambda = \frac{4bn}{3} = \frac{2,4 \cdot 10^{-6}}{3} = 0,8 \cdot 10^{-6} \text{ м,}$$

$$k = 2 \quad \lambda = \frac{4bn}{5} = \frac{2,4 \cdot 10^{-6}}{5} = 0,48 \cdot 10^{-6} \text{ м,}$$

$$k = 3 \quad \lambda = \frac{4bn}{7} = \frac{2,4 \cdot 10^{-6}}{7} = 0,34 \cdot 10^{-6} \text{ м.}$$

Из этих результатов видно, что в интервал, который указан в условии задачи, попадает только $\lambda = 0,48 \cdot 10^{-6} \text{ м}$ (для $k = 2$).

Задача 2.10

На поверхность стеклянного объектива ($n_1 = 1,5$) нанесена тонкая пленка вещества с показателем преломления $n = 1,35$. Найти наименьшую толщину пленки, при которой имеет место максимальное ослабление света в средней части видимого спектра. Лучи падают нормально поверхности пленки.

Решение

Пленка, показатель преломления которой меньше, чем показатель преломления вещества, на которое она нанесена, – это так называемая «просветляющая» пленка. Такие пленки в случае нанесения на поверхности линз уменьшают рассеяние и отражение падающего света от поверхности оптического элемента (объектива). Они улучшают светопропускание системы и контраст оптического изображения. Чаще всего пытаются снизить коэффициент отражения для лучей зеленой части спектра ($\lambda = 555 \text{ нм}$ – область наибольшей чувствительности глаза человека), потому что объективы имеют голубовато-фиолетовую или голубовато-серую окраску. Сама же оптика в этом случае называется «просветленной оптикой».

Поскольку показатель преломления пленки меньше, чем показатель преломления объектива ($n < n_1$), на который она нанесена, потеря полуволны при отражении монохроматического света от тонкой пленки происходит на обеих ее поверхностях, следовательно в оптической разности хода световых волн дополнительную разность хода $\Delta' = \pm \lambda/2$ учитывать не нужно:

$$\Delta = 2b\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}.$$

Если обеспечено ослабление света, то это означает, что выполняется условие интерференционного минимума

$$\Delta = (2k + 1) \frac{\lambda}{2}.$$

Тогда $2b\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} = (2k + 1)\frac{\lambda}{2}$.

Учитывая, что свет падает нормально к поверхности пленки ($\sin \alpha = 0$), получим

$$2bn = (2k + 1)\frac{\lambda}{2},$$

откуда

$$b = \frac{(2k + 1)\lambda}{4n}.$$

Минимальной толщине пленки соответствует $k = 0$:

$$b_{\min} = \frac{\lambda}{4n} = \frac{555 \cdot 10^{-9}}{4 \cdot 1,35} = 1,03 \cdot 10^{-7} \text{ м.}$$

Задача 2.11

Найти минимальную толщину пленки с показателем преломления $n = 1,33$, при которой свет с длиной волны $\lambda_1 = 0,64$ мкм испытывает максимальное отражение, а свет с длиной волны $\lambda_2 = 0,4$ мкм не отражается совсем. Угол падения равен $\alpha = 30^\circ$.

Решение

Для света с длиной волны $\lambda_1 = 0,64$ мкм должно выполняться условие интерференционного максимума, а для света с длиной волны $\lambda_2 = 0,4$ мкм – условие интерференционного минимума. Толщину пленки будем искать, полагая одновременное выполнение обоих этих условий:

$$\begin{cases} 2b\sqrt{n^2 - \sin^2 \vartheta} + \frac{\lambda_1}{2} = 2k_1 \frac{\lambda_1}{2}, \\ 2b\sqrt{n^2 - \sin^2 \vartheta} + \frac{\lambda_2}{2} = (2k_2 + 1) \frac{\lambda_2}{2}, \end{cases}$$

где k_1 и k_2 – номера соответствующих интерференционных максимума и минимума.

$$\begin{cases} 2b\sqrt{n^2 - \sin^2 \vartheta} = (2k_1 - 1) \frac{\lambda_1}{2}, \\ 2b\sqrt{n^2 - \sin^2 \vartheta} = k_2 \frac{\lambda_2}{2}. \end{cases}$$

Разделив первое уравнение на второе, получим

$$1 = \frac{(2k_1 - 1)\lambda_1 \cdot 2}{2 \cdot 2k_2 \lambda_2}.$$

Подставим в это выражение значения длин волн из условия задачи:

$$\frac{2k_2}{2k_1 - 1} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{0,64}{0,4} = \frac{8}{5},$$

откуда

$$5k_2 = 8k_1 - 4.$$

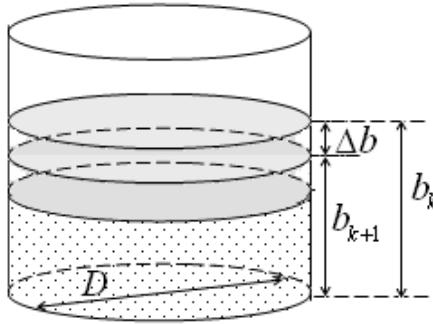
Мы получили уравнение с двумя неизвестными, однако мы его можем решить методом подбора, принимая во внимание тот факт, что k_1 и k_2 являются целыми числами, преимущественно небольшими (до 20). Легко видеть, что это уравнение обращается в тождество при $k_1 = 3$ и $k_2 = 4$.

Толщина пленки может быть найдена, например, из первого уравнения

$$b = \frac{(2k_1 - 1)\lambda_1}{4\sqrt{n^2 - \sin^2 \vartheta}} = \frac{(2 \cdot 3 - 1) \cdot 0,64 \cdot 10^{-6}}{4\sqrt{1,33^2 - 0,5^2}} = 0,65 \cdot 10^{-6} \text{ м.}$$

Задача 2.12

На поверхности воды, которая находится в сосуде диаметром $D = 30$ см, находится тонкая пленка этилового спирта ($n = 1,36$), которая испаряется. Пучок монохроматического красного света с длиной волны $\lambda = 650$ нм падает на поверхность спиртовой пленки под углом $\alpha = 30^\circ$. Найти: 1) массу спирта, которая должна испариться для того, чтобы один минимум сменился другим, если плотность спирта $\rho = 789 \text{ кг/м}^3$; 2) скорость испарения спирта, если интервал времени между последовательными минимумами составляет 10 минут.



Решение

Когда тонкий слой спирта освещается монохроматическим светом, то в зависимости от толщины спиртовой пленки могут выполняться условия или интерференционного максимума, или минимума. За счет испарения толщина пленки уменьшается, поэтому имеет место чередование минимумов, когда пленка выглядит черной, и максимумов, когда пленка красная.

Допустим, что один минимум наблюдается, когда толщина спиртовой пленки равна b_k , а следующий – при толщине b_{k+1} .

Тогда, учитывая, что оптическая разность хода при интерференции в тонких плоскопараллельных пленках равняется $\Delta = 2b\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} \pm \frac{\lambda}{2}$, запишем

$$\begin{cases} 2b_k \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} + \frac{\lambda}{2} = (2k+1) \frac{\lambda}{2}, \\ 2b_{k+1} \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} + \frac{\lambda}{2} = [2(k+1)+1] \frac{\lambda}{2}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2b_k \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} = k\lambda, \\ 2b_{k+1} \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} = (k+1)\lambda, \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_k = \frac{k\lambda}{2\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}}, \\ b_{k+1} = \frac{(k+1)\lambda}{2\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}}, \end{cases}$$

$$\Delta b = b_{k+1} - b_k = \frac{(k+1)\lambda}{2\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}} - \frac{k\lambda}{2\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}} = \frac{\lambda}{2\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}}.$$

Масса спирта, который находится в слое объемом $V = \Delta b \cdot S = \Delta b \cdot \frac{\pi D^2}{4}$, связана с его плотностью выражением

$$m = \rho V = \rho S \Delta b = \rho \cdot \frac{\pi D^2}{4} \cdot \frac{\lambda}{2\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}}.$$

Подставляя числовые данные, найдем искомую массу

$$m = \frac{789 \cdot \pi \cdot 0,09 \cdot 650 \cdot 10^{-9}}{8\sqrt{1,36^2 - 0,25}} = 1,43 \cdot 10^{-5} \text{ кг.}$$

Скорость испарения определяется массой, испаряющейся за единицу времени. Она равна

$$\frac{m}{t} = \frac{1,43 \cdot 10^{-5}}{10 \cdot 3600} \approx 4 \cdot 10^{-10} \text{ кг/с.}$$

Задача 2.13

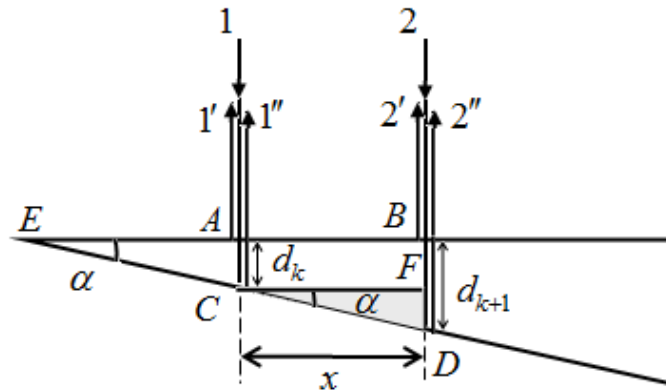
На стеклянный клин с малым углом между его гранями перпендикулярно его грани падает параллельный пучок лучей монохроматического света с длиной волны $\lambda = 0,6 \text{ мкм}$. Найти угол α при вершине клина, если расстояние между ближайшими темными интерференционными полосами равно $x = 0,4 \text{ мм}$.

Решение

Параллельный пучок света падает нормально к поверхности клина. Лучи 1 и 2 частично отражаются в точках A и B на верхней грани (отраженные лучи $1'$ и $2'$), а частично – от нижней грани клина в точках C и D (лучи $1''$ и $2''$). Принимая во внимание то, что угол клина α очень мал, можно считать, что отраженные лучи $1'$, $1''$ и $2'$, $2''$ идут параллельно друг другу. Кроме того, лучи $1'$, $1''$ и $2'$, $2''$ являются когерентными, потому на поверхности клина наблюдается интерференционная картина.

Темные полосы наблюдаются в тех местах клина, где для лучей отраженных от верхней и нижней граней оптическая разность хода такова, что в ней укладывается нечетное количество полуволн, т. е. выполняется условия интерференционного минимума:

$$\Delta = (2k + 1) \frac{\lambda}{2}, \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$



В рассматриваемом случае оптические разности хода с дополнительной разностью хода, связанной с изменением фазы волны на противоположную при отражении от оптически более плотной среды в точках A и B , равны

$$\begin{cases} 2d_k n + \frac{\lambda}{2} = (2k+1) \frac{\lambda}{2}, \\ 2d_{k+1} n + \frac{\lambda}{2} = [2(k+1)+1] \frac{\lambda}{2}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2d_k n = k\lambda, \\ 2d_{k+1} n = (k+1)\lambda. \end{cases}$$

Отсюда
$$d_k = \frac{k\lambda}{2n}, \quad d_{k+1} = \frac{(k+1)\lambda}{2n}.$$

Треугольник $\triangle CFD$ подобен треугольнику $\triangle EBD$, а значит, $\angle BED = \angle FCD = \alpha$. Из $\triangle CFD$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{FD}{CF} = \frac{d_{k+1} - d_k}{x} = \frac{(k+1)\lambda - k\lambda}{2nx} = \frac{\lambda}{2nx} = \frac{0,6 \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 1,5 \cdot 0,4 \cdot 10^{-3}} = 5 \cdot 10^{-4},$$

$$\alpha = \operatorname{arctg}(5 \cdot 10^{-4}) = 0,03^\circ.$$

Задача 2.14

Установку для наблюдения колец Ньютона освещают монохроматическим светом, который падает по нормали к поверхности линзы. Наблюдение ведется в отраженном свете. Радиусы двух соседних темных колец равны 4 и 4,38 мм. Радиус кривизны линзы $R = 6,4$ м. Найти порядковые номера колец и длину волны света.

Решение

Будем считать, что кольца, о которых идет речь в задаче, имеют номера k и $k+1$.

Тогда по формуле, которая определяет радиусы темных колец Ньютона в отраженном свете, и с учетом того, что в зазоре между линзой и пластинкой находится воздух ($n=1$), получим

$$\begin{cases} \sqrt{kR\lambda} = r_k = 4 \cdot 10^{-3}, \\ \sqrt{(k+1)R\lambda} = r_{k+1} = 4,38 \cdot 10^{-3}, \end{cases}$$

$$\sqrt{\frac{k}{k+1}} = \frac{4 \cdot 10^{-3}}{4,38 \cdot 10^{-3}} = 0,913,$$

$$k = (k+1) \cdot 0,834.$$

Откуда

$$k = 5, \quad k+1 = 6.$$

Длину волны света найдем из выражения $r_k = \sqrt{kR\lambda}$:

$$\lambda = \frac{r_k^2}{k \cdot R} = \frac{16 \cdot 10^{-6}}{5 \cdot 6,4} = 5 \cdot 10^{-7} \text{ м.}$$

Задача 2.15

Установка для наблюдения колец Ньютона освещается монохроматическим светом, который падает по нормали к поверхности линзы. Наблюдение ведется в отраженном свете. Расстояние между пятым и двадцать пятым светлыми кольцами 4,8 мм. Найти расстояние между четвертым и шестнадцатым темными кольцами.

Решение

Применив формулы для нахождения радиусов темных и светлых колец Ньютона в отраженном свете, запишем

$$r_{25} - r_5 = \sqrt{\frac{49R\lambda}{2}} - \sqrt{\frac{9R\lambda}{2}} = \sqrt{R\lambda} \left(\frac{7-3}{\sqrt{2}} \right) = 2,83\sqrt{R\lambda},$$

$$r_{16} - r_4 = \sqrt{16R\lambda} - \sqrt{4R\lambda} = 2\sqrt{R\lambda}.$$

Разделив одно уравнение на другое, получим

$$\frac{r_{25} - r_5}{r_{16} - r_4} = \frac{2,83\sqrt{R\lambda}}{2\sqrt{R\lambda}}.$$

Тогда искомое расстояние составит

$$r_{16} - r_4 = (r_{25} - r_5) \cdot 0,707 = 4,8 \cdot 10^{-3} \cdot 0,707 = 3,4 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

Задача 2.16

Установку для наблюдения колец Ньютона освещают монохроматическим светом с длиной волны $\lambda = 500$ нм, что падает по нормали к поверхности линзы. Зазор между линзой и стеклянной пластинкой заполнен водой. Найти толщину слоя воды между линзой и пластинкой в том месте, где наблюдается четвертое светлое кольцо в отраженном свете.

Решение

Размер зазора между линзой и пластинкой в установке для наблюдения колец Ньютона (рис. 2.11, а) равен

$$b = \frac{r_k^2}{2R}.$$

Радиус k -го светлого кольца Ньютона в отраженном свете

$$r_k = \sqrt{\frac{(2k-1)R\lambda}{2n}}.$$

Тогда

$$b = \frac{(2k-1)R\lambda}{4nR} = \frac{(2k-1)\lambda}{4n}.$$

Учитывая, что длина волны $\lambda = 500$ нм, показатель преломления воды $n = 1,33$, а $k = 4$, рассчитаем толщину слоя воды между линзой и стеклянной пластинкой:

$$b = \frac{(2 \cdot 4 - 1) \cdot 500 \cdot 10^{-9}}{4 \cdot 1,33} = 6,58 \cdot 10^{-7} \text{ м.}$$

III. КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

К2.1. Длина волны когерентных волн составляет $\lambda = 0,4$ мкм, разность хода равна $\Delta = 2$ мкм. Что наблюдается в точке наложения этих волн?

$$\left[\Delta = 5\lambda = 10\frac{\lambda}{2}, \max \right]$$

К2.2. Когда на пути одного из интерферирующих лучей поместили стеклянную ($n = 1,5$) пластинку толщиной $h = 1,2$ мкм, интерференционная картина от двух когерентных источников с $\lambda = 0,75$ мкм сместилась. Найти, на сколько полос и в каком направлении сместилась картина. [на 8 полос от центра]

К2.3. Опыт Юнга проводится с использованием монохроматического света вначале с длиной волны $\lambda_1 = 600$ нм, а затем – с λ_2 . Определить длину волны во втором случае, если седьмая светлая полоса в первом случае совпадает с десятой темной полосой во втором. $\left[\lambda_2 = \frac{2k_1\lambda_1}{2k_2 + 1} = 400 \text{ нм} \right]$.

К2.4. Пучок белого света падает нормально на мыльную пленку с показателем преломления $n = 1,3$ находящуюся в воздухе. При какой наименьшей толщине пленки отраженный свет с длиной волны $\lambda = 0,55$ мкм окажется максимально усиленным в результате интерференции? [$d = 0,55$ мкм]

К2.5. На поверхность линзы нанесена тонкая пленка с показателем преломления $n = 1,26$ меньшим, чем у материала линзы. При какой наименьшей толщине пленки не будет наблюдаться отражение монохроматического света с длиной волны $\lambda = 0,55$ мкм, падающим под углом $\alpha = 30^\circ$?

$$\left[d_k = \frac{(2k + 1)\lambda}{4\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}}; k = 1, d_1 = 0,35 \right]$$

К2.6. На тонкий стеклянный клин нормально падает монохроматический свет. Определить его длину волны, если расстояние между соседними интерференционными полосами равно $0,3$ мм, показатель преломления стекла $n = 1,33$, а угол при вершине клина $\alpha = 2'$. [$\lambda = 2nx \cdot \operatorname{tg} \alpha = 0,46$ мкм].

К2.7. Установка для наблюдения колец Ньютона в отраженном свете освещается падающим нормально к поверхности линзы монохроматическим светом с длиной волны $\lambda = 0,5$ мкм. В зазоре между линзой и пластинкой находится жидкость с показателем преломления $n = 1,33$. Найти ширину зазора там, где наблюдается третье темное кольцо Ньютона.

$$\left[b = \frac{k\lambda}{2n} = 5,64 \cdot 10^{-7} \text{ м} \right]$$

К2.8. В зазоре между линзой и пластинкой в установке для наблюдения колец Ньютона. Радиус кривизны линзы $R = 1$ м, длина волны $\lambda = 700$ нм, а радиус восьмого темного кольца $r_8 = 2$ мм. Найти показатель преломления жидкости. $[n = 1,4]$

Глава 3.

ВОЛНОВАЯ ОПТИКА. ДИФРАКЦИЯ СВЕТА

I. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

1. Явление дифракция

Дифракцией называется совокупность явлений, наблюдаемых при распространении света в среде с резкими неоднородностями (вблизи границ непрозрачных или прозрачных тел; малых отверстий и т. п.), и связанных с отклонениями от законов геометрической оптики.

Общее между интерференцией и дифракцией – перераспределение светового потока при суперпозиции когерентных волн.

Различие состоит в том, что интерференция происходит от конечного числа дискретных источников, а дифракция – от непрерывно расположенных источников.

В результате дифракции световые волны огибают препятствия, размеры которых порядка длины волны света и проникают в область геометрической тени.

Если плоская волна нормально падает на отверстие в непрозрачном экране, то каждая точка волнового фронта, выделенного отверстием, является согласно принципу Гюйгенса источником вторичных волн (рис. 3.1). Огибающая этих волн, задающая положение волнового фронта в следующий момент времени, заходит в область геометрической тени, т. е. волна как бы огибает края отверстия.

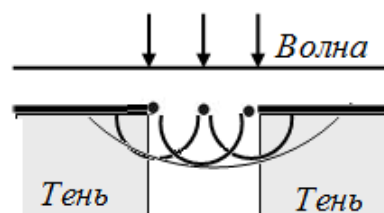


Рисунок 3.1 – Проникновение света в область геометрической тени

2. Принцип Гюйгенса-Френеля

Принцип Гюйгенса решает задачу только о направлении распространения волн, но не позволяет оценить интенсивность волн, распространяющихся в различных направлениях. О. Френель существенно развил этот принцип, внося в него ряд положений:

- все вторичные источники фронта волны, исходящие из одного источника, когерентны между собой;

- равные по площади участки волновой поверхности излучают равные интенсивности;

- для вторичных источников действует принцип суперпозиции: каждый участок волной поверхности излучает независимо от других;

- каждый элемент волновой поверхности излучает преимущественно в направлении внешней нормали к волновой поверхности, при этом амплитуда вторичной сферической волны пропорциональна площади dS элемента. Результирующее колебание в точке наблюдения определяется формулой

$$E = \int_S K(\varphi) \cdot \frac{A}{r} \cdot \cos(\omega t - kr + \alpha) dS, \quad (3.1)$$

где E – модуль светового вектора, A – амплитуда светового колебания, r – расстояние от элемента dS до точки наблюдения, k – волновое число, $K(\varphi)$ – коэффициент, зависящий от угла φ между нормалью к площадке dS и направлением от dS до точки наблюдения.

3. Метод зон Френеля

Расчет по формуле (3.1) сложен, но Френелем был предложен метод количественных расчетов дифракционной картины для случаев, характеризующихся определенной симметрией. Этот простой метод расчета получил название **метод зон Френеля**.

Для определения амплитуды светового колебания, возбуждаемого в точке наблюдения P , разделим волновой фронт сферической волны, испущенной источником S , на зоны (рис.3.2). Расстояния от краев k -й зоны до точки P определяется как $b_k = b + k \frac{\lambda}{2}$. Тогда колебания, приходящие в точку наблюдения от двух соседних зон, находятся в противофазе, т. к. разность хода между ними равна полуволне, следовательно, интерферируя, вторичные волны от соседних зон гасят друг друга.

Площади зон приблизительно равны, а амплитуды колебаний, возбуждаемых в точке наблюдения зонами Френеля, образуют монотонно убывающую последовательность $A_1 > A_2 > A_3 > \dots > A_{k-1} > A_k$, поскольку с увеличением номера зоны возрастает угол φ между нормалью к площади зоны и направлением на точку наблюдения. При этом амплитуды волн, приходящих в точку P от соседних зон, можно считать равными.

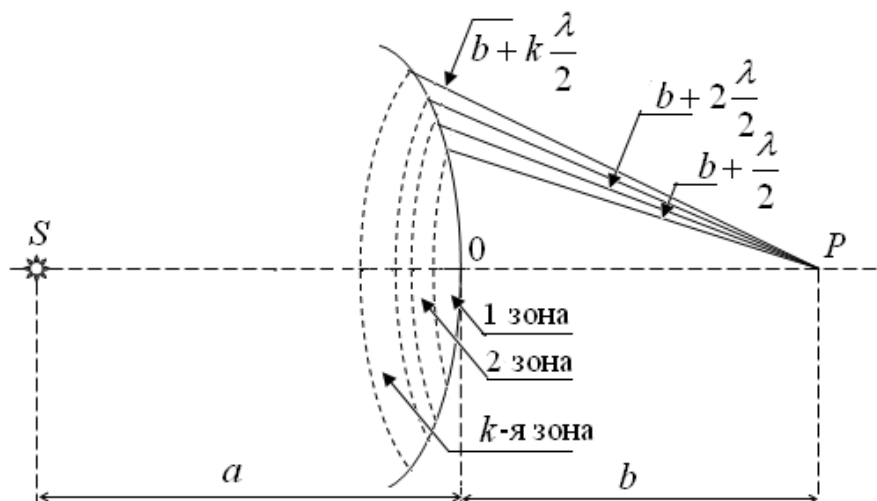


Рисунок 3.2 – Метод зон Френеля

Амплитуда в точке наблюдения:

$$A = A_1 - A_2 + A_3 - A_4 + \dots = \frac{A_1}{2} + \left(\frac{A_1}{2} - A_2 + \frac{A_3}{2} \right) + \left(\frac{A_3}{2} - A_4 + \frac{A_5}{2} \right) + \dots$$

- Открыт весь фронт: результирующая амплитуда $A = \frac{A_1}{2}$, т. к. все суммы в скобках равны нулю. Интенсивность в точке P , определяемая квадратом амплитуды равна $I = A^2 = A_1^2/4$;

- Открыта первая зона: $A = A_1$. Интенсивность $I = A^2 = A_1^2$, т. е. интенсивность в точке наблюдения в 4 раза больше, чем при полностью открытом экране;

- Открыты две зоны: $A = A_1 - A_2 = 0$. Интенсивность $I = 0$;

- Открыты три зоны: $A = A_1 - A_2 + A_3 = A_1$;

- Открыты четыре зоны: $A = 0$, и т. д.

Радиус k -й зоны Френеля определяется по формулам:

1. в случае сферической волны ($a \approx b$)

$$r_k = \sqrt{\frac{ab}{a+b}} k \lambda ;$$

2. в случае плоской волны ($a \gg b$)

$$r_k = \sqrt{bk\lambda} .$$

4. Дифракция Френеля на круглом отверстии, диске и на краю непрозрачного экрана

а) Если дифракционная картина наблюдается на конечном расстоянии от препятствия, то это называется **дифракция Френеля** или **дифракция в сходящихся лучах**. В этом случае на пути сферической световой волны находится непрозрачный экран с **круглым отверстием**, центр которого располагается на оси симметрии волнового фронта. Вид дифракционной картины зависит от числа зон Френеля, на которые можно разбить открытую экраном часть волновой поверхности. Амплитуда результирующего колебания в точке наблюдения, возбуждаемого всеми зонами, находящимися в круглом отверстии, равна

$$A = A_1 - A_2 + A_3 - \dots + (-1)^{k-1} A_k = \begin{cases} \frac{A_1 + A_k}{2} & \text{при } k - \text{нечетном,} \\ \frac{A_1 - A_k}{2} & \text{при } k - \text{четном.} \end{cases} \quad (3.2)$$

Таким образом, в центре дифракционной картины при нечетном k должен наблюдаться максимум, а при четном k – минимум интенсивности (рис. 3.3).

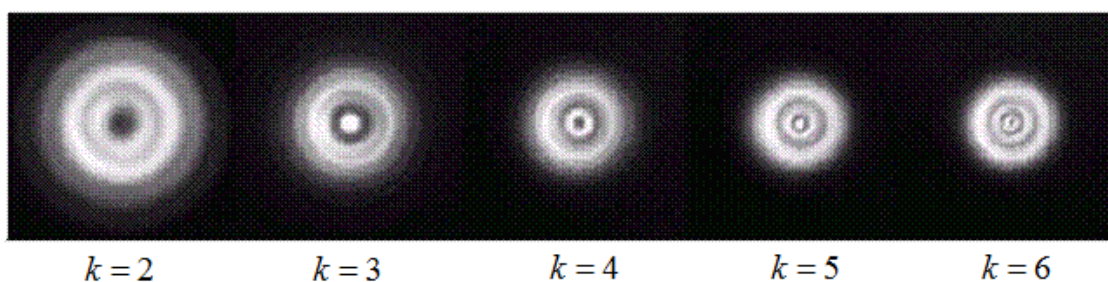


Рисунок 3.3 – Дифракция Френеля на круглом отверстии
(k – количество открытых зон)

Дифракционная картина вблизи точки наблюдения имеет вид чередующихся темных и светлых колец с центром в точке наблюдения. Если отверстие освещается белым светом, то кольца имеют радужную окраску, т. к. число зон Френеля зависит от длины волны λ .

б) Если распространяющаяся от точечного источника сферическая волна на своем пути встречает **непрозрачный диск**, то дифракционная картина

имеет вид чередующихся светлых и темных концентрических колец (рис. 3.4). В этом случае зоны Френеля строят от края непрозрачного диска, поскольку некоторое количество внутренних зон Френеля оказывается закрытыми. При этом вклад в интенсивность в точке наблюдения, находящейся в центре области геометрической тени, дают остальные зоны. В результате эта точка должна быть светлой.

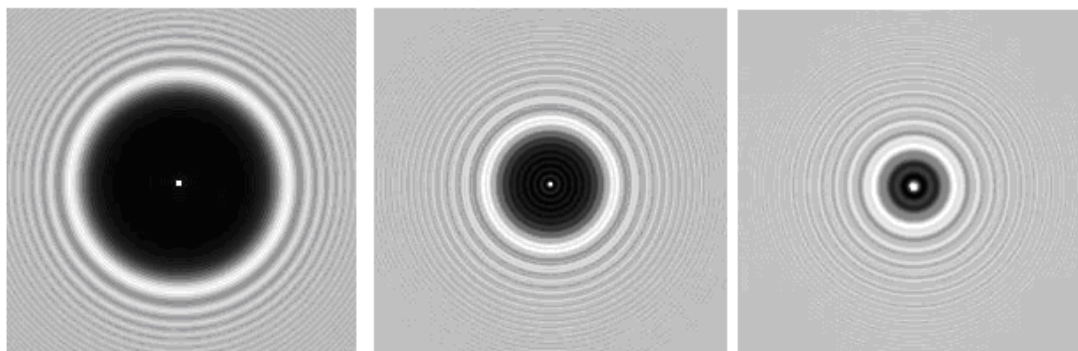


Рисунок 3.4 – Дифракция Френеля на дисках различных диаметров

Это светлое пятно в центре дифракционной картины носит название **пятно Пуассона** (или **пятно Араго-Пуассона**) и названо оно так в честь двух выдающихся ученых Симеона Дени Пуассона (1781–1840) (рис. 3.5, *а*) знаменитого французского математика и физика, который теоретически в 1818 г. предсказал его существование. Полагая свою идею абсурдной, Пуассон хотел использовать свой результат как контрдовод против теории дифракции О. Френеля. Однако французский физик Доменик Араго (1786–1853) (рис. 3.5, *б*) поставил эксперимент, подтвердивший предсказание Пуассона. В итоге пятно Араго-Пуассона явилось веским аргументом в пользу волновой теории.

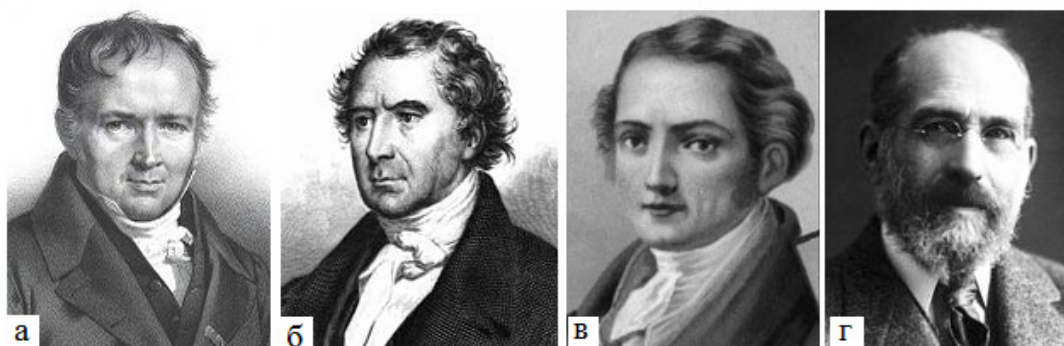


Рисунок 3.5 – Симеон Пуассон (*а*), Доменик Араго (*б*), Йозеф Фраунгофер (*в*), Артур Шустер (*г*)

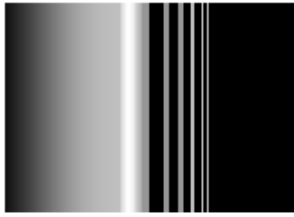


Рисунок 3.6 – Дифракция Френеля на краю полуплоскости

в) Дифракционная картина от *края полуплоскости* (рис. 3.6) представляет собой набор чередующихся темных и светлых полос, параллельных границе полуплоскости.

5. Дифракция Фраунгофера на щели

Дифракция Фраунгофера – это дифракция в параллельных лучах. Она реализуется тогда, когда наблюдение дифракционной картины производится на достаточно большом расстоянии от препятствия, на которое падает электромагнитная волна (свет). Такой тип формирования дифракционной картины назван по имени немецкого физика-оптика Йозефа Фраунгофера (1787–1826) (рис. 3.5, в).

На длинную щель шириной b нормально падает плоская световая волна (рис. 3.7). Для получения плоской волны (потока параллельных лучей) точечный источник помещают в фокусе собирающей линзы. В этом случае после преломления в линзе получается параллельный пучок света (применение лазера в качестве источника света позволяет обойтись без линзы). Этот пучок попадает на щель. Дифракционная картина наблюдается в фокальной плоскости другой собирающей линзы, помещенной между щелью и экраном. Если бы соблюдался закон прямолинейного распространения света, то на экране получилось бы изображение источника света (щели). За счет дифракции имеем интерференционную картину на экране, при этом в ее создании участвуют когерентные вторичные волны. Кстати, именно поэтому дифракцию можно определять как интерференцию вторичных волн.

На экране в побочном фокусе линзы собираются все лучи, падающие под углом ψ к оптической оси линзы.

Оптическая разность хода Δ между крайними лучами MK и NL , идущими в произвольном направлении ψ , составляет

$$\Delta = NC = b \sin \psi. \quad (3.3)$$

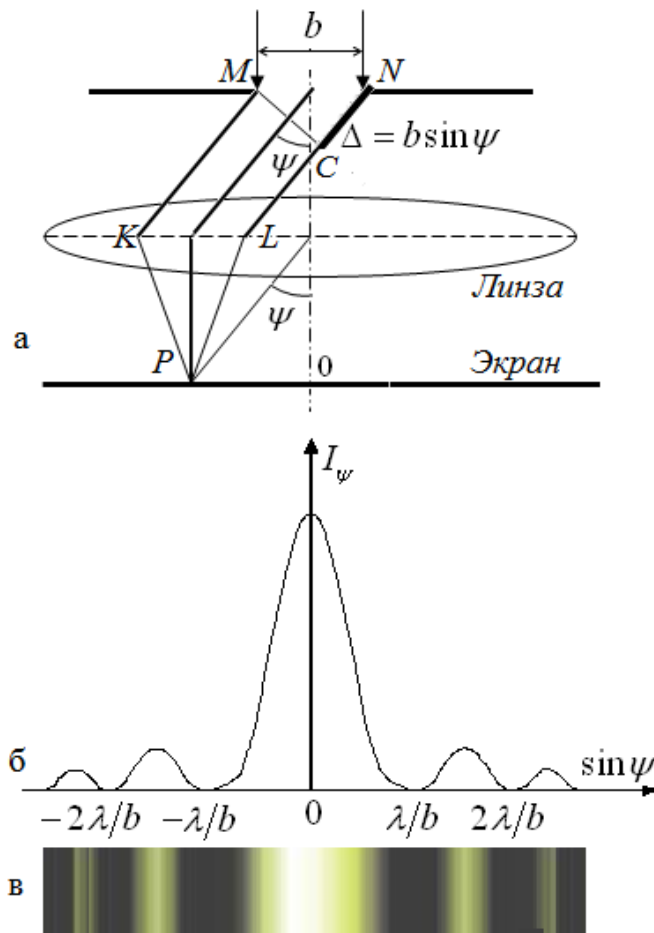


Рисунок 3.7 – Дифракция Фраунгофера на щели:
схема (а), распределение интенсивностей (б),
дифракционная картина (в)

Разобьем щель на зоны. В данном случае, когда зоны имеют вид полос, параллельных ребру щели, их называют **зоны Шустера**, а не Френеля. Названы они так в честь выдающегося английского физика Артура Шустера (1851–1934) (рис. 3.5, з).

Ширина каждой зоны выбирается так, чтобы разность хода лучей от краев этих зон была равна $\frac{\lambda}{2}$. Тогда на ширине щели поместится $\frac{\Delta}{\lambda/2}$ зон.

Так как свет на щель падает нормально, то плоскость щели совпадает с волновым фронтом, а все точки волнового фронта в плоскости щели будут колебаться в одинаковой фазе. Амплитуды вторичных волн в плоскости щели равны, так как выбранные зоны Шустера имеют одинаковые площади и одинаково наклонены к направлению наблюдения.

Число зон Шустера, укладывающихся на ширине щели, зависит от угла ψ . От числа зон Шустера, в свою очередь, зависит результат наложения всех вторичных волн. Поскольку излучение, исходящее от соседних зон, находится в противофазе друг к другу, при интерференции света от каждой пары соседних зон Шустера амплитуда результирующих колебаний равна нулю, так как колебания от каждой пары соседних зон взаимно гасят друг друга. Следовательно, если число зон Шустера **четное**, то в точке P наблюдается **дифракционный минимум**

$$b \sin \psi = \pm 2k \frac{\lambda}{2}, \text{ где } k = 1, 2, 3, \dots \quad (3.4)$$

Если число зон **нечетное**, то в точке P – **дифракционный максимум**

$$b \sin \psi = \pm (2k + 1) \frac{\lambda}{2}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (3.5)$$

где k – порядок дифракционного минимума или максимума.

В направлении $\psi = 0$ наблюдается самый интенсивный центральный максимум нулевого порядка.

6. Дифракционная решетка

Дифракционная решетка – система большого числа одинаковых по ширине и параллельных друг другу щелей шириной b , лежащих в одной плоскости и разделенных непрозрачными промежутками a , равными по ширине. У хороших дифракционных решеток количество щелей достигает $10^7 - 10^8$ штрихов (щелей) на миллиметр.

Величина $d = a + b$ называется **период (постоянная) дифракционной решетки**.

Пусть плоская монохроматическая волна падает нормально к плоскости решетки (рис. 3.8). Колебания во всех точках щелей происходят в одной фазе, поскольку эти точки находятся на одной волновой поверхности. По принципу Гюйгенса-Френеля каждая щель является источником вторичных волн, которые могут интерферировать друг с другом. Получившуюся дифракционную картину можно наблюдать фокальной плоскости линзы, помещенной между щелями и экраном. Пусть свет дифрагирует на щелях под углом ψ . Так как щели находятся друг от друга на одинаковых рас-

стояниях, то разности хода лучей, идущих от двух соседних щелей, для данного направления ψ будут одинаковыми в пределах всей дифракционной решетки, $\Delta = d \sin \psi$.

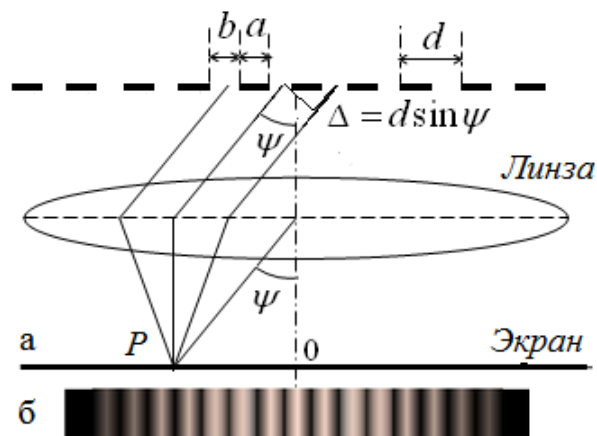


Рисунок 3.8 – Дифракция на дифракционной решетке:
схема (а), дифракционная картина (б)

В тех направлениях, для которых разность хода равна четному количеству полуволен, наблюдается максимум. Условие **дифракционного максимума** (или **уравнение решетки**)

$$d \sin \psi = \pm k \lambda, \quad (3.6)$$

где $k = 0, 1, 2, \dots$ – порядок дифракционного максимума (порядок спектра).

Условие **дифракционного минимума** для дифракционной решетки совпадает с условием минимума для одной щели

$$b \sin \psi = \pm 2k \frac{\lambda}{2}, \quad (3.7)$$

где $k = 1, 2, 3, \dots$ – порядок дифракционного минимума.

Если дифракционная картина освещается белым светом, то для различных длин волн положения максимумов не совпадают (кроме центрального, нулевого максимума). Центральный максимум – белая полоса, остальные – радужные – называются дифракционными спектрами различных порядков в зависимости от k .

Применение дифракционной решетки основано на ее способности разлагать в спектр, что позволяет изучать спектральный состав света. В связи с этим дифракционную решетку считают спектральным прибором. Соответствующие приборы называются спектрографами и спектрометрами.

Разрешающая способность (R) дифракционной решетки характеризует ее способность образовывать отдельно спектральные линии с близкими значениями длин волн: λ и $\lambda + \Delta\lambda$.

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda}. \quad (3.8)$$

$$R = kN = kN_0l = k \frac{l}{d}, \quad (3.9)$$

где k – номер (порядок) дифракционного спектра (максимума); N – общее число штрихов дифракционной решетки; l – длина дифракционной решетки; N_0 – число штрихов на единице длины.

Обычно решетки для УФ-излучения имеют $N_0 = 500 - 2500$ штрихов/мм, для видимого диапазона – $N_0 = 300 - 1500$ штрихов/мм, для ИК-излучения – $N_0 = 1 - 300$ штрихов/мм.

7. Дифракция рентгеновского излучения на кристаллах

Дифракционная решетка – пример одномерной периодической структуры. Естественная трехмерная периодическая структура – кристаллическая решетка. Обычная периодичность кристаллической решетки $\sim 10^{-10}$ м. Для осуществления дифракции необходимо, чтобы длина волны дифрагирующего излучения была того же порядка. Этому условию отвечает рентгеновское излучение – электромагнитное излучение с длиной волны $\lambda = 10^{-8} - 10^{-12}$ м (подробно рентгеновское излучение будет рассмотрено разделе «Квантовая оптика»).

В этом случае имеет место так называемая **брэгговская дифракция** – явление сильного рассеяния волн на периодической кристаллической решетке при определенных углах падения. Положение максимумов при дифракции монохроматических рентгеновских лучей с длиной волны λ на кристаллах описывается **формулой Вульфа-Брэггов**

$$2d \sin \vartheta = \pm k\lambda, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.10)$$

где ϑ – угол скольжения лучей, дополняющий до 90° угол падения α , а d – параметр решетки кристалла.

При дифракции рентгеновского излучения симметрия расположения дифракционных максимумов отражает симметрию расположения частиц в решетке кристалла, поэтому зная длину волны излучения и угол скольжения, можно исследовать структуру кристаллов. Подобные методы исследования носят название **рентгеноструктурного** анализа. Если известны параметры решетки, то измеряя углы скольжения, можно исследовать спектры излучения. Это называется рентгеновская спектроскопия (спектрометрия) или **рентгеноспектральный** анализ.

Брэгговская дифракция получила название в честь англо-австралийских физиков отца и сына Брэггов – Уильяма Генри (1862–1942) и Уильяма Лоуренса (1890–1971), получивших за свои работы в области рентгеновской дифракции Нобелевскую премию в 1915 г. Георгий Вульф (1863–1925) – российский физик, независимо от Брэггов вывел условие дифракции рентгеновских лучей (рис. 3.9).



Рисунок 3.9 – Уильям Генри Брэгг (а),
Уильям Лоуренс Брэгг (б), Георгий Вульф (в)

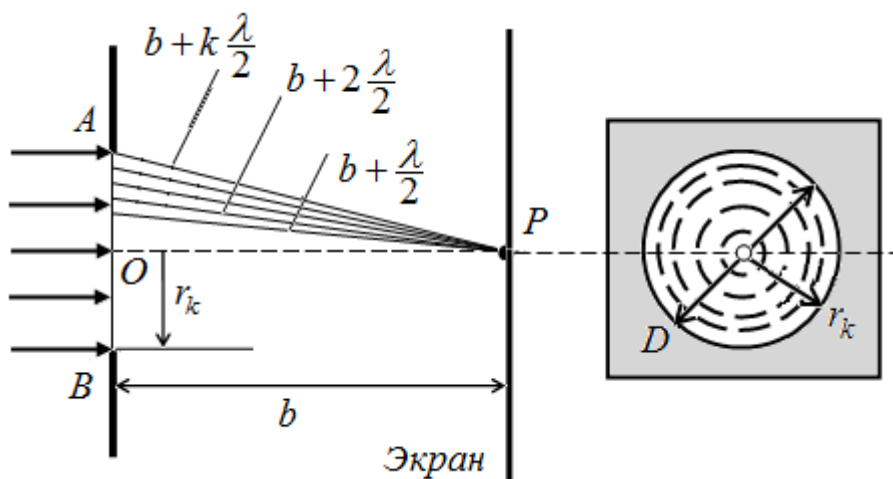
II. ЗАДАЧИ

Задача 3.1

Свет от монохроматического источника ($\lambda = 600$ нм) падает нормально на диафрагму с диаметром отверстия $D = 6$ мм. За диафрагмой на расстоянии $b = 3$ м от нее находится экран. Сколько зон Френеля укладывается в отверстии диафрагмы? Каким будет центр картины на экране: светлым или темным?

Решение

В данном случае через небольшое круглое отверстие AB диаметром D проходит плоская монохроматическая волна от удаленного источника. Точка наблюдения P на экране находится на оси симметрии на расстоянии b от отверстия. В соответствии с принципом Гюйгенса-Френеля разобьем волновую поверхность падающей волны в месте расположения отверстия на кольцевые зоны (зоны Френеля) по следующему правилу: расстояние от краев соседних зон до точки P должны отличаться на половину длины волны. Если смотреть на волновую поверхность из точки P , то границы зон Френеля будут концентрическими окружностями.



Из треугольника ΔPO

$$r_k^2 + b^2 = \left(b + k \frac{\lambda}{2}\right)^2,$$

$$r_k^2 + b^2 = b^2 + 2bk \frac{\lambda}{2} + \frac{k^2 \lambda^2}{4}.$$

Поскольку $\frac{k^2 \lambda^2}{4} \ll kb\lambda$, то $r_k = \sqrt{kb\lambda}$.

Как видно из рисунка, $r_k = \frac{D}{2}$. Тогда $\sqrt{kb\lambda} = \frac{D}{2}$,

откуда
$$k = \frac{D^2}{4b\lambda} = \frac{36 \cdot 10^{-6}}{4 \cdot 3 \cdot 600 \cdot 10^{-9}} = 5.$$

Центр дифракционной картины на экране будет светлым, поскольку в отверстии укладывается нечетное число зон Френеля.

Задача 3.2

Найти радиусы первых двух зон Френеля, если расстояние от источника света до волновой поверхности $a = 1$ м, а расстояние от волновой поверхности до точки наблюдения $b = 1$ м. Длина волны света $\lambda = 500$ нм.

Решение

Радиус k -й зоны Френеля в случае дифракции света от точечного источника определяется выражением

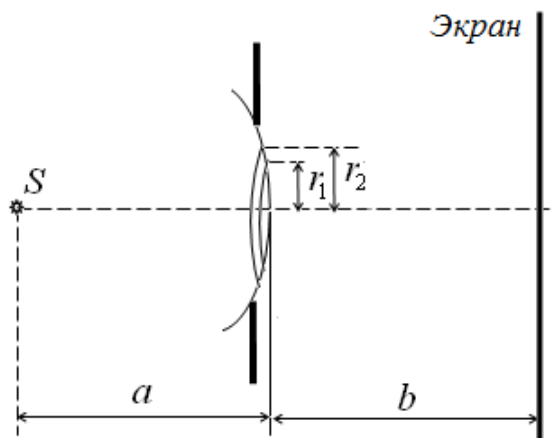
$$r_k = \sqrt{\frac{ab}{a+b} k \lambda},$$

где $k = 1, 2, \dots$ – номер зоны Френеля, a – расстояние от источника света до волновой поверхности сферической волны, b – расстояние от волновой поверхности до экрана. Тогда для $k=1$

$$r_1 = \sqrt{\frac{1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 500 \cdot 10^{-9}}{1+1}} = 5 \cdot 10^{-4} \text{ м},$$

а для $k=2$

$$r_2 = \sqrt{\frac{1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 500 \cdot 10^{-9}}{1+1}} = 7,07 \cdot 10^{-4} \text{ м}.$$



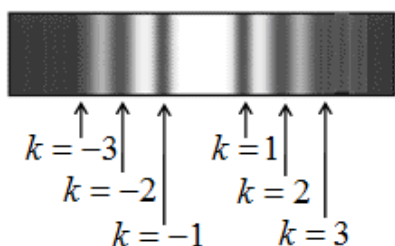
Задача 3.3

На щель шириной $b = 2,25$ мкм падает нормально параллельный пучок монохроматического света ($\lambda = 589$ нм). Под какими углами будут наблюдаться дифракционные минимумы света? Какое количество минимумов дает эта щель?

Решение

Из условия наблюдения дифракционного минимума для дифракции на щели $b \sin \psi = \pm 2k \frac{\lambda}{2}$ номер дифракционного минимума выражается как

$$k = \pm \frac{b \sin \psi}{\lambda}.$$



Принимая во внимание то, что $\sin \psi \leq 1$, получим

$$k_{\max} \leq \frac{b}{\lambda} = \frac{2,25 \cdot 10^{-6}}{589 \cdot 10^{-9}} = 3,83.$$

Вспомним, что k – это номер дифракционного минимума, а значит, это целое (не дробное) число. Поэтому максимальный номер минимума $k_{\max} = 3$.

Найдем углы, которые отвечают этим трем дифракционным минимумам, из выражения

$$\sin \psi = \frac{k \lambda}{b}.$$

$$k = 1 \quad \sin \psi_1 = \frac{1 \cdot 589 \cdot 10^{-9}}{2 \cdot 10^{-6}} = 0,295, \quad \psi_1 = 17,1^\circ;$$

$$k = 2 \quad \sin \psi_2 = \frac{2 \cdot 589 \cdot 10^{-9}}{2 \cdot 10^{-6}} = 0,59, \quad \psi_2 = 36,2^\circ;$$

$$k = 3 \quad \sin \psi_3 = \frac{3 \cdot 589 \cdot 10^{-9}}{2 \cdot 10^{-6}} = 0,885, \quad \psi_3 = 62,3^\circ.$$

Эта щель дает шесть дифракционных минимумов: по 3 минимума слева и справа от центрального максимума, т. е. $K = 2k_{\max} = 2 \cdot 3 = 6$.

Задача 3.4

На щель шириной $b = 20$ мкм падает нормально параллельный пучок монохроматического света ($\lambda = 500$ нм). Найти ширину изображения щели на экране, удаленном от нее на расстояние $L = 1$ м. Шириной изображения считать расстояние между первыми дифракционными минимумами, которые расположены по обе стороны от главного (центрального) максимума.

Решение

Из схематического изображения дифракционной картины видно, что минимумы интенсивности света при дифракции от щели наблюдаются под углами ψ , которые определяются из условия дифракционного минимума для щели

$$b \sin \psi = \pm k \lambda.$$

Для минимумов первого порядка ($k = 1$):

$$b \sin \psi_1 = \lambda.$$

Откуда

$$\sin \psi_1 = \frac{\lambda}{b},$$

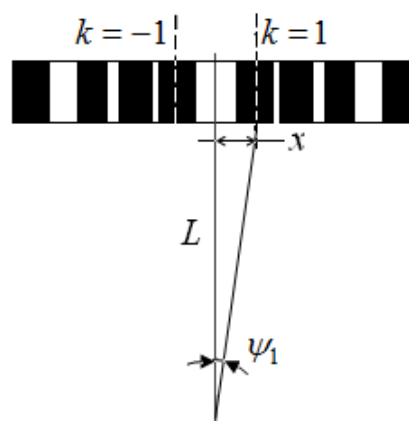
$$\psi_1 = \arcsin \frac{\lambda}{b} = \arcsin \frac{500 \cdot 10^{-9}}{20 \cdot 10^{-6}} = \arcsin 0,025 = 1,43^\circ.$$

С другой стороны, из треугольника на схеме расстояние x между центральным максимумом и первым минимумом может быть выражено как

$$x = L \cdot \operatorname{tg} \psi_1 = 1 \cdot \operatorname{tg} 1,43^\circ = 0,025 \text{ м.}$$

Искомое расстояние между двумя минимумами $2x = 2 \cdot 0,025 = 0,05$ м.

Обратим внимание на то, что обычно углы дифракции для минимумов (и максимумов) первых порядков очень малы, следовательно, значения их синусов и тангенсов практически совпадают, потому в подавляющем большинстве задач можно считать $\sin \psi \approx \operatorname{tg} \psi$.



Задача 3.5

На щель шириной $b = 30$ мкм нормально падает монохроматический свет с длиной волны $\lambda = 600$ нм. За щелью находится собирающая линза, в фокальной плоскости которой расположен экран. Что будет наблюдаться на экране, если угол дифракции равняется: 1) $\psi = 4,59^\circ$; 2) $\psi = 6,32^\circ$.

Решение

Условия наблюдения дифракционного минимума $b \sin \psi = \pm 2k \frac{\lambda}{2}$ и максимума $b \sin \psi = \pm (2k + 1) \frac{\lambda}{2}$ можно записать в общем виде

$$b \sin \psi = \pm m \frac{\lambda}{2},$$

где m – это четное число для минимума и нечетное – для максимума.

Тогда
$$m = \frac{2b \sin \psi}{\lambda}.$$

1) Для первого значения угла дифракции

$$m_1 = \frac{2b \sin \psi_1}{\lambda} = \frac{2 \cdot 30 \cdot 10^{-6} \cdot \sin 4,59^\circ}{600 \cdot 10^{-9}} = 8.$$

Мы получили четное число, следовательно, из $m_1 = 2k = 8$, $k = 4$.

Таким образом, первому углу дифракции отвечает 4-й дифракционный минимум.

2. Для второго угла дифракции

$$m_2 = \frac{2b \sin \psi_2}{\lambda} = \frac{2 \cdot 30 \cdot 10^{-6} \cdot \sin 6,32^\circ}{600 \cdot 10^{-9}} = 11.$$

Результат – нечетное число, следовательно, из выражения $m_2 = 2k + 1 = 11$ получим $k = 5$, т.е. 5-й дифракционный максимум.

Задача 3.6

На дифракционную решетку нормально падает монохроматический свет с длиной волны $\lambda = 600$ нм. На экране, расположенном на расстоянии 2,5 м от решетки, нулевой и первый максимумы отстоят на 4 см друг от друга. Найти: 1) период дифракционной решетки; 2) максимальный угол дифракции; 3) общее количество максимумов, которое может дать эта решетка.

Решение

Условие наблюдения дифракционного максимума для дифракционной решетки

$$d \sin \psi = \pm k \lambda, \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

Запишем это условие для первого ($k=1$) максимума:

$$d \sin \psi_1 = \lambda.$$

С другой стороны, как видно из схемы,

$$\operatorname{tg} \psi_1 = \frac{x_1}{L},$$

$$\psi_1 = \operatorname{arctg} \frac{x_1}{L} = \operatorname{arctg} \frac{4 \cdot 10^{-2}}{2,5} = 0,016.$$

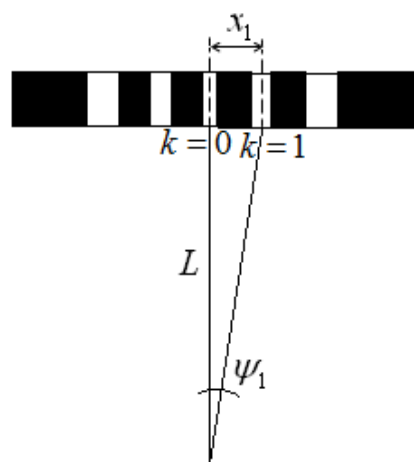
$$\psi_1 = 0,9^\circ.$$

Тогда

$$d = \frac{\lambda}{\sin \psi_1} = 3,75 \cdot 10^{-5} \text{ м.}$$

Для определения максимального угла дифракции найдем наибольший порядок максимума, который дает эта дифракционная решетка. Из условия наблюдения дифракционного максимума для решетки и с учетом того, что $\sin \psi \leq 1$, получим

$$k_{\max} \leq \frac{d (\sin \psi)_{\max}}{\lambda} = \frac{d}{\lambda} = \frac{3,75 \cdot 10^{-5}}{600 \cdot 10^{-9}} = 62,5.$$



Поскольку номер максимума должен быть целым числом, округлим результат до целого, отбрасывая дробную часть. Следует помнить, что округление результата по правилам математики в сторону большего числа приведет к значению соответствующего значения синуса угла дифракции большего единицы, чего не может быть. Поэтому наибольший порядок максимума $k_{\max} = 62$.

Дифракционному максимуму 62-го порядка отвечает

$$\sin \psi_{\max} = \frac{k_{\max} \cdot \lambda}{d} = \frac{62 \cdot 600 \cdot 10^{-9}}{3,75 \cdot 10^{-5}} = 0,992,$$

и, окончательно, угол дифракции равен

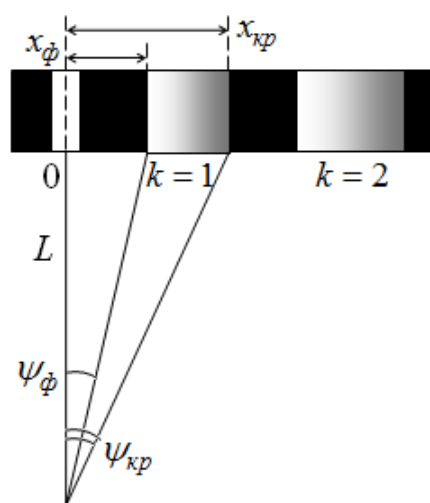
$$\psi_{\max} = \arcsin 0,992 = 82,75^\circ.$$

Общее количество максимумов, которое дает решетка: по 62 максимума с каждой стороны от центрального плюс сам центральный максимум, т. е.

$$K = 2k_{\max} + 1 = 2 \cdot 62 + 1 = 125.$$

Задача 3.7

Дифракционная решетка, имеющая 100 штрихов на 1 мм, расположена на расстоянии 2 м от экрана и освещается белым светом, который нормально падает на нее. Найти ширину дифракционного спектра 1-го порядка, если граница видимого спектра: для фиолетового света $\lambda_{\phi} = 380$ нм, для красного – $\lambda_{кр} = 760$ нм.



Решение

Если дифракционная решетка имеет 100 штрихов на 1 мм, т.е. $N_0 = 100 \text{ мм}^{-1} = 10^5 \text{ м}^{-1}$, ее период

$$d = \frac{1}{N_0} = \frac{1}{10^5} = 10^{-5} \text{ м}.$$

Как следует из условия дифракционного максимума для дифракционной решетки

$d \sin \psi = \pm k \lambda$, положение главных максимумов (кроме нулевого) зависит от длины волны λ . Поэтому решетка способна раскладывать излучение в спектр, т.е. она является спектральным прибором.

Если на решетку падает немонахроматическое излучение (например, белый свет), то в каждом порядке дифракции (при каждом значении k) возникает спектр исследуемого излучения, причем фиолетовая часть спектра располагается ближе к максимуму нулевого порядка, а красная – дальше, т. к. $\lambda_{\phi} < \lambda_{кр}$. Чем больше порядок спектра, тем шире будет дифракционный максимум. Иногда случается, что сине-фиолетовая часть спектра высшего порядка перекрывает красно-желтую область спектра предыдущего порядка.

Запишем условия наблюдения дифракционного максимума первого порядка для фиолетового и красного излучения, а также соотношения между геометрическими характеристиками дифракционной схемы:

$$\begin{cases} d \sin \psi_{\phi} = 1 \cdot \lambda_{\phi}, \\ d \sin \psi_{кр} = 1 \cdot \lambda_{кр}, \\ x_{\phi} = L \cdot \operatorname{tg} \psi_{\phi}, \\ x_{кр} = L \cdot \operatorname{tg} \psi_{кр}. \end{cases}$$

Из первых двух уравнений системы выразим значения синусов углов дифракции:

$$\sin \psi_{\phi} = \frac{\lambda_{\phi}}{d} = \frac{380 \cdot 10^{-9}}{10^{-5}} = 0,038, \quad \sin \psi_{кр} = \frac{\lambda_{кр}}{d} = \frac{760 \cdot 10^{-9}}{10^{-5}} = 0,076.$$

Ввиду того, что значения синусов очень малы, то малы и соответствующие им углы, следовательно, можно считать, что

$$\operatorname{tg} \psi_{\phi} \approx \sin \psi_{\phi}, \text{ а } \operatorname{tg} \psi_{кр} \approx \sin \psi_{кр}.$$

Тогда

$$x_{\phi} = L \cdot \operatorname{tg} \psi_{\phi} \approx L \cdot \sin \psi_{\phi},$$

$$x_{кр} = L \cdot \operatorname{tg} \psi_{кр} \approx L \cdot \sin \psi_{кр}.$$

Окончательно, искомая ширина максимума первого порядка

$$\Delta x = x_{кр} - x_{\phi} = L \operatorname{tg} \psi_{кр} - L \operatorname{tg} \psi_{\phi} \approx L (\sin \psi_{кр} - \sin \psi_{\phi}) = 2(0,076 - 0,036) = 0,076 \text{ м.}$$

Задача 3.8

На дифракционную решетку нормально падает пучок света от разрядной трубки. Какой должна быть постоянная дифракционной решетки для того, чтобы в направлении $\psi = 41^\circ$ совпадали максимумы для длин волн $\lambda_1 = 656,3$ нм и $\lambda_2 = 410,2$ нм?

Решение

Запишем условия наблюдения дифракционных максимумов для обеих длин волн

$$\begin{cases} d \sin \psi = k_1 \lambda_1, \\ d \sin \psi = k_2 \lambda_2. \end{cases}$$

Из равенства левых частей следует, что $k_1 \lambda_1 = k_2 \lambda_2$. Это уравнение с двумя неизвестными, но мы его можем решить, исходя из того, что номера дифракционных максимумов – это целые числа, причем сравнительно небольшие.

$$\frac{k_1}{k_2} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{410,2}{656,3} = \frac{5}{8}.$$

Постоянную дифракционной решетки (период решетки) определим из первого уравнения системы:

$$d = \frac{k_1 \lambda_1}{\sin \psi} = \frac{5 \cdot 656,3 \cdot 10^{-9}}{\sin 41^\circ} = 5 \cdot 10^{-6} \text{ м.}$$

Задача 3.9

На дифракционную решетку нормально падает пучок света от разрядной трубки, которая наполнена гелием. На какую линию λ_2 в спектре третьего порядка накладывается красная линия гелия ($\lambda_1 = 670$ нм) спектра второго порядка?

Решение

Если на дифракционную решетку падает немонахроматический свет, то в каждом порядке дифракции (при каждом значении k) возникает спектр, причем, чем меньше длина волны излучения, тем ближе к центру дифрак-

ционной картины расположена соответствующая ему линия. Кроме того, чем больше порядок спектра, тем больше будет его ширина. В результате возможно перекрытие спектров, когда коротковолновая область спектра более высокого порядка накладывается на длинноволновую область спектра предыдущего порядка.

Поскольку перекрытие линий означает, что они наблюдаются под одинаковыми углами дифракции, выполняются соотношения

$$\begin{cases} d \sin \psi = k_1 \lambda_1 \\ d \sin \psi = k_2 \lambda_2 \end{cases},$$

откуда $k_1 \lambda_1 = k_2 \lambda_2$.

Тогда искомая длина волны

$$\lambda_2 = \frac{k_1 \lambda_1}{k_2} = \frac{2 \cdot 670 \cdot 10^{-9}}{3} = 4,47 \cdot 10^{-7} \text{ м.}$$

Таким образом, на красную линию спектра второго порядка накладывается фиолетовая линия спектра третьего порядка.

Задача 3.10

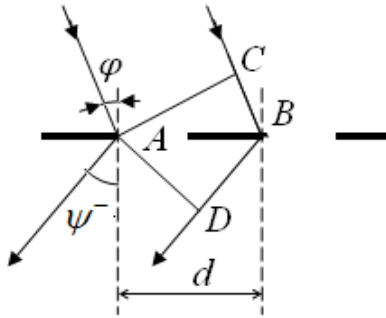
На дифракционную решетку с периодом $d = 2500$ нм падает под углом $\varphi = 20^\circ$ к нормали свет с длиной волны $\lambda = 600$ нм. Считая углы, отсчитанные от нормали против часовой стрелки, положительными, а по часовой стрелке – отрицательными, найти: 1) число k_{\max}^- отрицательных максимумов; 2) число k_{\max}^+ положительных максимумов; 3) общее количество максимумов K_{\max} , которые наблюдаются; 4) угол ψ , под которым наблюдается центральный (нулевой) максимум; 5) сравнить найденное общее число максимумов с числом максимумов, которое дала бы эта решетка при нормальном падении света на нее.

Решение

Дифракционная картина от дифракционной решетки является результатом многолучевой интерференции когерентных пучков света, которые идут от всех щелей решетки под углом ψ . Поскольку щели одинаковы и находятся на равных расстояниях, то характер интерференции можно

определить по оптической разности хода Δ световых пучков, которые идут от двух соседних щелей. При наклонном падении света на дифракционную решетку под углом φ рассмотрим отдельно отрицательные и положительные углы дифракции.

1) Ввиду того, что $CB = d \sin \varphi$ и $BD = d \sin \psi^-$, оптическая разность хода световых пучков от соседних щелей для отрицательных углов дифракции равна $\Delta = CB + BD = d \sin \varphi + d \sin \psi^-$.



Согласно условию наблюдения главных максимумов для ψ^- в оптической разности хода должно укладываться четное число полуволен (или целое число длин волн), следовательно,

$$d \sin \varphi + d \sin \psi^- = k^- \lambda.$$

Наибольший порядок k_{\max}^- отрицательного дифракционного максимума найдем из условия, что $|\sin \psi^-| \leq 1$. Тогда

$$k_{\max}^- \leq \frac{d}{\lambda} (1 + \sin \varphi) = \frac{2500 \cdot 10^{-9}}{600 \cdot 10^{-9}} (1 + \sin 20^\circ) = 5,6.$$

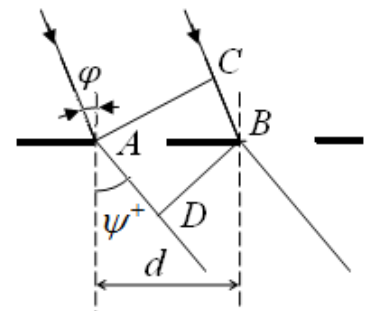
Это значит, что наблюдается $k_{\max}^- = 5$ отрицательных максимумов, а именно,

$$k^- = -1, -2, -3, -4, -5.$$

2) Для положительных углов дифракции оптическая разность хода световых пучков от соседних щелей с учетом того, что $AD = d \sin \psi^+$, а $CB = d \sin \varphi$, равна $\Delta = AD - CB = d \sin \psi^+ - d \sin \varphi$.

Согласно условию наблюдения главных максимумов для ψ^+ в оптической разности хода Δ должно укладываться четное число полуволен (или целое число длин волн), следовательно

$$d \sin \psi^+ - d \sin \varphi = k^+ \lambda.$$



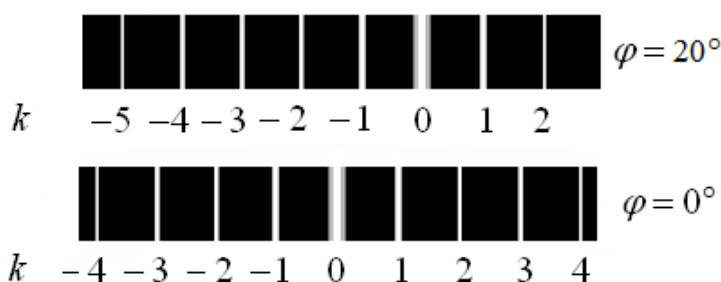
Наибольший порядок k_{\max}^+ положительного дифракционного максимума найдем из условия, что $|\sin \psi^+| \leq 1$. Тогда

$$k_{\max}^+ \leq \frac{d}{\lambda}(1 - \sin \varphi) = \frac{2500 \cdot 10^{-9}}{600 \cdot 10^{-9}}(1 - \sin 20^\circ) = 2,7.$$

Это означает, что наблюдается $k_{\max}^+ = 2$ положительных максимумов, а именно, $k^+ = +1, +2$.

3) Поскольку при падении на дифракционную решетку света под углом $\varphi = 20^\circ$ создаются максимумы следующих порядков $k = 2, 1, 0, -1, -2, -3, -4, -5$, то количество максимумов, которые можно наблюдать, с учетом нулевого (центрального) максимума, составляет

$$K = k_{\max}^- + k_{\max}^+ + 1 = 5 + 2 + 1 = 8.$$



4) Определим угол, под которым можно наблюдать максимум нулевого порядка $k = 0$. В этом случае оптическая разность хода равняется нулю:

$$d \sin \psi^+ - d \sin \varphi = 0,$$

откуда

$$\sin \psi^+ = \sin \varphi,$$

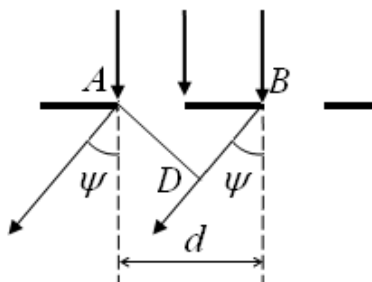
$$\psi^+ = \varphi = 20^\circ.$$

5) При нормальном падении света на дифракционную решетку оптическая разность хода лучей, которые идут от двух соседних щелей, не зависит от знака угла дифракции и составляет $\Delta = DC = d \sin \psi$.

Условие наблюдения главных максимумов

$$d \sin \psi = k \lambda,$$

где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots$



Наибольший порядок k_{\max} дифракционного максимума найдем из условия, что $|\sin \psi| \leq 1$.
Тогда

$$k_{\max} \leq \frac{d}{\lambda} = \frac{2500 \cdot 10^{-9}}{600 \cdot 10^{-9}} = 4,17.$$

Это значит, что $k_{\max} = 4$, и при нормальном падении света на дифракционную решетку можно наблюдать максимумы следующих порядков

$$k = 4, 3, 2, 1, 0, -1, -2, -3, -4.$$

Общее количество максимумов с учетом центрального

$$K = 2k_{\max} + 1 = 2 \cdot 4 + 1 = 9.$$

Задача 3.11

Найти разрешающую способность дифракционной решетки, чтобы с ее помощью можно было наблюдать отдельно две спектральных линии натрия с $\lambda_1 = 589,0$ нм и $\lambda_2 = 589,6$ нм. Сколько штрихов должна иметь эта решетка для того, чтобы это было возможно в спектре третьего порядка?

Решение

Разрешающая способность дифракционной решетки характеризует ее возможность образовывать отдельно спектральные линии с близкими значениями длин волн λ и $\lambda + \Delta\lambda$

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda}.$$

Длину волны λ найдем как среднее арифметическое двух длин λ_1 и λ_2 :

$$\lambda = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} = \frac{589 + 589,6}{2} = 589,3 \text{ нм.}$$

Минимальная разность длин волн двух соседних спектральных линий, при которой эти линии наблюдаются раздельно, равна

$$\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1 = 589,6 - 589 = 0,6 \text{ нм.}$$

Разрешающая способность дифракционной решетки

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \frac{589,3}{0,6} = 982 .$$

Поскольку $R = kN$, то для того, чтобы наблюдать раздельно указанные линии в спектре третьего порядка $k = 3$, дифракционная решетка должна иметь не меньше, чем

$$N = \frac{R}{k} = \frac{982}{3} = 328 \text{ штрихов.}$$

Задача 3.12

На дифракционную решетку длиной 2 см, имеющую 5000 штрихов, падает нормально свет, который прошел через светофильтр, полоса пропускания которого по длинам волн составляет от 420 нм до 480 нм. Будут ли перекрываться спектры разных порядков?

Решение

Период дифракционной решетки

$$d = \frac{1}{N_0} = \frac{l}{N} = \frac{0,02}{5000} = 4 \cdot 10^{-6} \text{ м.}$$

Для того, чтобы спектры перекрывались, необходимо, чтобы для них был одинаковый угол дифракции, следовательно,

$$\begin{cases} d \sin \psi = k_1 \lambda_1, \\ d \sin \psi = k_2 \lambda_2. \end{cases}$$

Из равенства правых частей следует $k_1 \lambda_1 = k_2 \lambda_2$. В этом уравнении с двумя неизвестными порядки дифракционных максимумов можно легко подобрать, помня о том, что это целые числа:

$$\frac{k_1}{k_2} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{480}{420} = \frac{8}{7}.$$

Теперь необходимо убедиться, что данная решетка позволяет получить максимумы соответствующих порядков. Для выяснения этого используем условие наблюдения дифракционного максимума для каждой из длин волн, найдя с ее помощью максимальный порядок дифракционного спектра. Полагая, что $(\sin \psi)_{\max} = 1$, получим

$$k_{1\max} = \frac{d \sin \psi_1}{\lambda_1} = \frac{d (\sin \psi_1)_{\max}}{\lambda_1} = \frac{4 \cdot 10^{-6}}{420 \cdot 10^{-9}} = 9,52 \approx 9,$$

$$k_{2\max} = \frac{d \sin \psi_1}{\lambda_2} = \frac{d (\sin \psi_1)_{\max}}{\lambda_2} = \frac{4 \cdot 10^{-6}}{480 \cdot 10^{-9}} = 8,33 \approx 8.$$

Таким образом, мы выяснили, что максимальный порядок спектра для первой длины волны составляет $k_{1\max} = 9$, а для второй – $k_{2\max} = 8$, поэтому при использовании данной решетки будет перекрытие спектров: спектр 8-го порядка для λ_1 накладывается на спектр 7-го порядка для λ_2 .

Задача 3.13

Дифракционная картина получена с помощью дифракционной решетки длиной 0,5 см, имеющей 100 штрихов на 1 мм. Определить, в спектре какого порядка можно наблюдать раздельно две линии калия с длинами волн $\lambda_1 = 578$ нм и $\lambda_2 = 580$ нм.

Решение

Разрешающая способность дифракционной решетки

$$R = \frac{\lambda}{\Delta \lambda} = k N_0 l,$$

где N_0 – количество штрихов на единице длины решетки, а l – ее длина.

Длина волны λ как среднее арифметическое двух длин волн

$$\lambda = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} = \frac{578 + 580}{2} = 579 \text{ нм.}$$

Разность длин волн

$$\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1 = 580 - 578 = 0,2 \text{ нм},$$

следовательно, порядок спектра

$$k = \frac{\lambda}{\Delta\lambda \cdot N_0 \cdot l} = \frac{579 \cdot 10^{-9}}{0,2 \cdot 10^{-9} \cdot 10^5 \cdot 0,005} = 5,8 \approx 6.$$

Обратим внимание на следующее. Если мы получили результат в виде дробного числа, то независимо от размера дробной части, округлять надо в сторону *большого* значения. Например, независимо от того, получили мы ответ 5,3 или 5,8, округлять его надо до 6. Это означает, что линии будут разделены, только *начиная* со спектра 6-го порядка, поскольку ширина дифракционного максимума увеличивается с ростом его порядка.

Проверим, позволяет ли эта решетка получить спектр 6-го порядка:

$$k_{\max} = \frac{d \sin \psi}{\lambda_2} = \frac{d (\sin \psi)_{\max}}{\lambda_2} = \frac{1}{N_0 \lambda_2} = \frac{1}{10^5 \cdot 580 \cdot 10^{-9}} = 17,24 \approx 17.$$

Поскольку для этой дифракционной решетки максимальный порядок дифракционного спектра $k_{\max} = 17$, то с ее помощью можно наблюдать раздельно указанные линии, начиная со спектра 6-го порядка.

Задача 3.14

Угловая дисперсия дифракционной решетки при малых углах дифракции составляет $D_\psi = 5$ угловых минут/нм. Определить разрешающую способность решетки, если ее длина $l = 2$ см.

Решение

Угловая дисперсия D_ψ характеризует меру пространственного углового разделения $\partial\psi$ волн с разными длинами волн λ :

$$D_\psi = \frac{\partial\psi}{\partial\lambda} = \frac{k}{d \cos \psi} = \frac{k N_0}{\cos \psi}.$$

Учитывая, что $d = \frac{1}{N_0} = \frac{l}{N}$ и для малых углов $\cos \psi \approx 1$, получим

$$D_\psi = \frac{k}{d} = kN_0 = \frac{kN}{l},$$

откуда
$$N = \frac{D_\psi l}{k}.$$

Разрешающая способность

$$R = kN = k \frac{D_\psi l}{k} = D_\psi l.$$

Выразим угловую дисперсию, которая дана в минутах на нанометр, в радианах на метр:

$$D_\psi = \frac{5 \cdot 10^9}{60 \cdot 57,3} = 1,45 \cdot 10^6 \text{ рад/м.}$$

Тогда искомая разрешающая способность

$$R = D_\psi l = 1,45 \cdot 10^6 \cdot 0,02 = 2,91 \cdot 10^4.$$

Задача 3.15

Угловая дисперсия дифракционной решетки для $\lambda = 668$ нм в спектре первого порядка $D_\psi = 2,02 \cdot 10^5$ рад/м. Найти: 1) период дифракционной решетки; 2) линейную дисперсию D_l дифракционной решетки, если фокусное расстояние линзы, проецирующей спектр на экран, равно $F = 40$ см.

Решение

1) Из условия наблюдения первого дифракционного максимума для дифракционной решетки $d \sin \psi = 1 \cdot \lambda$ получим $\sin \psi = \frac{\lambda}{d}$ и $\cos \psi = \sqrt{1 - \lambda^2 / d^2}.$

Подставим полученное значение косинуса в формулу для угловой дисперсии:

$$D_{\psi} = \frac{d\psi}{d\lambda} = \frac{1}{d \cos \psi} = \frac{1}{d \sqrt{1 - \lambda^2/d^2}} = \frac{1}{\sqrt{d^2 - \lambda^2}},$$

откуда период дифракционной решетки

$$d = \sqrt{\frac{1}{D_{\psi}^2} + \lambda^2} = \sqrt{\frac{1}{(2,02 \cdot 10^5)^2} + (668 \cdot 10^{-9})^2} = 5 \cdot 10^{-6} \text{ м.}$$

2) Линейная дисперсия равна

$$D_l = F \cdot D_{\psi} = 0,4 \cdot 2,02 \cdot 10^5 = 8,08 \cdot 10^4 \text{ м/нм.}$$

III. КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

К3.1. На щель шириной $b = 0,1$ мм падает нормально монохроматическая волна с $\lambda = 0,6$ мкм. Найти расстояние между дифракционными максимумами первого порядка на экране, расположенном на расстоянии $L = 1$ м от щели. $\left[2x_1 = \frac{2Lk\lambda}{b} = 1,2 \text{ см} \right]$

К3.2. Определить, под каким углом будет наблюдаться третий дифракционный максимум, если щель шириной $b = 0,04$ мм освещается монохроматическим светом с длиной волны $\lambda = 680$ нм. $\left[\psi = \arcsin \frac{(2k+1)\lambda}{2b} = 5,9^\circ \right]$

К3.3. Найти углы, в направлении которых будут наблюдаться минимумы интенсивности, если узкая щель шириной $b = 2$ мкм освещается светом с длиной волны $\lambda = 600$ нм $\left[\psi_k = \arcsin \frac{k\lambda}{b}; \psi = 17,5^\circ; \psi_2 = 36,9^\circ; \psi_3 = 64,2^\circ \right]$

К3.4. Дифракционная решетка освещается параллельным пучком света с длиной волны $\lambda = 500$ нм, падающим по нормали к ее поверхности. Расстояние между двумя максимумами первого порядка на экране, удаленном на расстояние $L = 1$ м от решетки, составляет $2x_1 = 20,2$ см. Найти: постоянную дифракционной решетки d ; число штрихов на единице длины N_0 ; номер последнего максимума k_{\max} ; общее число максимумов, которые дает эта дифракционная решетка K_{\max} ; угол дифракции, соответствующий последнему максимуму ψ_{\max} .

$$\left[d = \frac{2L\lambda}{2x_1} = 4,95 \text{ мкм}; N_0 = \frac{1}{d} = 2,02 \cdot 10^5 \text{ м}^{-1}; k_{\max} = \frac{d}{\lambda} = 9; \right. \\ \left. K_{\max} = 19; \quad \psi_{\max} = \arcsin \frac{k_{\max}\lambda}{d} = 65,4^\circ \right]$$

К3.5. Дифракционная решетка освещена нормально падающим на нее монохроматическим светом. На какой угол отклонен максимум третьего порядка ψ_3 , если угол дифракции для максимума второго порядка составляет $\psi_2 = 14^\circ$? $[\psi_2 = 21,2^\circ]$

К3.6. Определить постоянную дифракционной решетки, в спектре первого порядка разрешены линии калия с длинами волн $\lambda_1 = 578$ нм и $\lambda_2 = 580$ нм. $[l = 1 \text{ см}]$

К3.7. Определить угловую дисперсию D_ψ для угла дифракции $\psi_3 = 30^\circ$ в спектре третьего порядка, если постоянная дифракционной решетки $d = 10$ мкм и ее длина $l = 1$ см. Какова разрешающая способность этой дифракционной решетки в спектре пятого порядка?

$$\left[D_\psi = 3,46 \cdot 10^5 \text{ рад/м}; R = 5000 \right]$$

Глава 4.

ВОЛНОВАЯ ОПТИКА. ПОЛЯРИЗАЦИЯ СВЕТА

I. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

1. Естественный и поляризованный свет. Поляризаторы

Следствием теории Максвелла является то, что световые волны являются поперечными: векторы напряженности электрического \vec{E} и магнитного \vec{H} полей взаимно перпендикулярны и колеблются перпендикулярно вектору скорости \vec{v} распространения волны (перпендикулярно лучу). Световая волна состоит из многих цугов электромагнитных волн, которые излучаются отдельными атомами. Цуги – это излучения атомов в виде ряда отдельных коротких импульсов. Электрическое и магнитное поля в электромагнитной волне изменяются синхронно, поэтому световую волну можно описывать только одним вектором \vec{E} (часто его называют **световым вектором**). Для каждого цуга плоскость колебаний светового вектора ориентирована случайно. Такой свет называют **естественным** или **неполяризованным** (рис. 4.1, а).

Поляризация – это свойство электромагнитных волн, которое характеризуется пространственно-временной упорядоченностью ориентации электрического вектора \vec{E} . **Поляризованным** называется свет, в котором направление колебаний светового вектора сохраняется неизменным. Если колебания светового вектора происходят только в одной плоскости, то свет называют **плоскополяризованным** (или линейно поляризованным) (рис. 4.1, в). Плоскость, в которой колеблется световой вектор \vec{E} , называется **плоскостью поляризации**. Свет, в котором имеется преимущественное направление колебаний вектора \vec{E} и незначительная амплитуда колебаний вектора \vec{E} в других направлениях, называется **частично поляризованным** (рис. 4.1, б). При частичной поляризации используется понятие **степени поляризации**, определяемой как

$$P = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}, \quad (4.1)$$

где I_{\max} и I_{\min} – максимальная и минимальная интенсивности частично поляризованного света, пропускаемого анализатором, соответственно. Для естественного света $I_{\max} = I_{\min}$ и $P = 0$, для плоскополяризованного $I_{\min} = 0$ и $P = 1$.

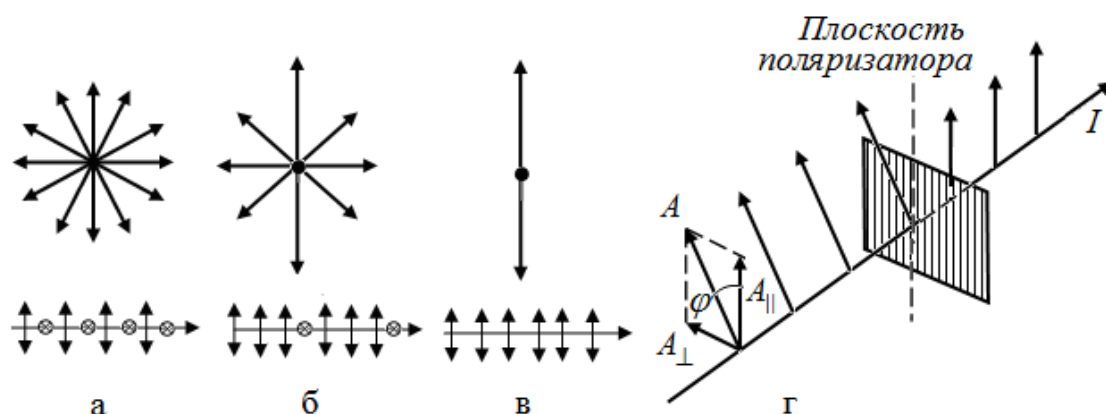


Рисунок 4.1 – Свет естественный (а), частично поляризованный (б), полностью поляризованный (в), прохождение естественного света через поляризатор (г)

Плоскополяризованный свет можно получить из естественного света с помощью приборов, называемых **поляризаторами**. Они пропускают только те колебания, которые параллельны плоскости, называемой **плоскостью поляризатора**, и полностью задерживают те колебания, которые происходят в плоскости, перпендикулярной этой плоскости. Простейшим поляризатором является поляроид – специально изготовленная пленка, поверхности которой защищены стеклами. В качестве поляризаторов используются материалы, характеризующиеся анизотропией в отношении колебаний вектора \vec{E} (анизотропией называется различие свойств среды в различных направлениях внутри этой среды). Такой анизотропией обладают некоторые природные кристаллы, например, турмалин и исландский шпат.

2. Закон Малюса

Колебание амплитуды A , происходящее в плоскости, составляющей угол φ с плоскостью поляризатора, можно представить в виде двух составляющих: параллельной $A_{\parallel} = A \cos \varphi$ и перпендикулярной $A_{\perp} = A \sin \varphi$ к плоскости поляризатора. Первое колебание проходит через плоскость поляризатора, второе будет задержано ею.

Интенсивность волны, прошедшей через поляризатор, пропорциональна квадрату ее амплитуды $A_{\parallel}^2 = A^2 \cos^2 \varphi$ и равна $I \cos^2 \varphi$, где I – интенсивность колебания с амплитудой A . Таким образом, колебание, параллельное плоскости поляризатора, несет долю интенсивности равную $\cos^2 \varphi$.

Поскольку в естественном свете все значения φ равновероятны, то интенсивность света, прошедшего через поляризатор, равна среднему значению $\cos^2 \varphi$, а, именно, $\frac{1}{2}$. Если вращать поляризатор вокруг направления естественного луча, то интенсивность прошедшего света не изменяется, меняется лишь ориентация плоскости колебаний света, выходящего из поляризатора (рис. 4.1, з).

Если на поляризатор падает плоскополяризованный свет интенсивности I_0 , то через поляризатор пройдет составляющая колебания $A = A_0 \cos \varphi$, где φ – угол между плоскостью поляризации падающего света и плоскостью поляризатора. Интенсивность прошедшего света I определяется **законом Малюса**:

$$I = I_0 \cos^2 \varphi. \quad (4.2)$$

Этот закон назван в честь открывшего его в 1810 г. французского инженера Этьена Луи Малюса (1775–1812) (рис. 4.2, а).

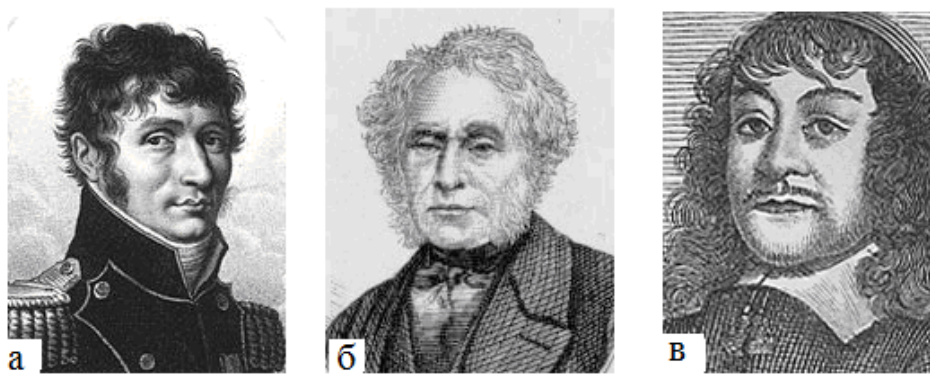


Рисунок 4.2 – Этьен Малюс (а), Давид Брюстер (б), Расмус Бартолин (в)

Если принимать во внимание поглощение и отражение света веществом поляризатора, то закон Малюса можно записать в виде

$$I = k_{np} I_0 \cos^2 \varphi = (1 - k_{ногл}) I_0 \cos^2 \varphi, \quad (4.3)$$

где k_{np} – коэффициент пропускания поляризатора, а $k_{ногл}$ – коэффициент поглощения, учитывающий потери на поглощение и отражение при прохождении через него.

Если на пути естественного луча стоят два поляризатора (часто второй поляризатор называют *анализатором*), угол между плоскостями поляризации которых равен φ , то после первого поляризатора свет будет плоскополяризованным с интенсивностью вдвое меньшей, чем у естественного света. После второго поляризатора свет по закону Малюса будет иметь интенсивность $I_0 \cos^2 \varphi$. В результате, интенсивность света после прохождения двух поляризаторов составит

$$I = \frac{1}{2} I_{есм} \cdot \cos^2 \varphi. \quad (4.4)$$

Очевидно, что максимальная интенсивность света, прошедшего два поляризатора, равна $I_{\max} = \frac{I_{есм}}{2}$ и наблюдается, если поляризаторы параллельны, т.е. при $\varphi = 0$. Минимальная интенсивность $I_{\min} = 0$ достигается при скрещенных поляризаторах, т.е. при $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

3. Поляризация при отражении и преломлении. Закон Брюстера

Рассмотрим способы получения линейно поляризованного света, используемые при изготовлении поляризаторов и анализаторов.

Свет поляризуется при отражении от границы раздела двух сред и при преломлении на границе.

Если угол падения света на границу раздела двух диэлектриков (например, «воздух-стекло») отличен от нуля, то отраженный и преломленный свет оказывается частично поляризованным.

В отраженном луче преобладают колебания, перпендикулярные плоскости падения, а в преломленном луче – колебания параллельные плоскости падения (рис. 4.3, а).

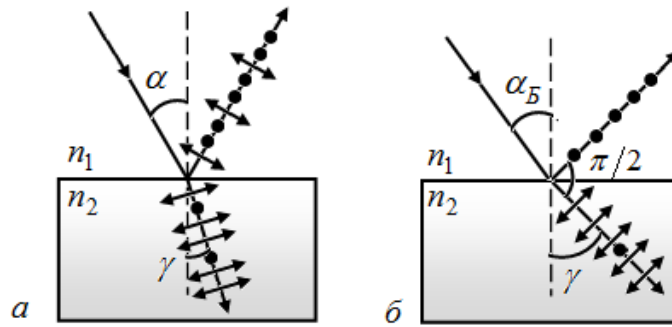


Рисунок 4.3 – Поляризация при отражении и преломлении: угол падения α (а), угол падения α_B – угол Брюстера (б)

Степень поляризации зависит от угла падения.

Закон Брюстера: если луч падает на границу двух сред под углом α_B , удовлетворяющим условию

$$\operatorname{tg} \alpha_B = \frac{n_2}{n_1} = n_{21}, \quad (4.5)$$

где n_{21} – показатель преломления второй среды (n_2) относительно первой (n_1), то отраженный луч оказывается полностью поляризованным, а преломленный луч – поляризован частично (рис. 4.3, б). Угол α_B , удовлетворяющий этому условию, называется **углом Брюстера** (или **углом полной поляризации**). При этом угол между отраженным и преломленными лучами равен $\pi/2$.

Закон назван именем Давида Брюстера (1781–1868), шотландского физика, открывшего его в 1815 г. (рис. 4.2, б).

4. Поляризация при двойном лучепреломлении. Обыкновенный и необыкновенный лучи. Дихроизм. Призма Николя

В 1669 г. датский ученый, профессор Копенгагенского университета Расмус Бартолин (1625–1698) впервые описал явление **двойного лучепреломления** (рис. 4.2, в). Он обнаружил, что луч внутри кристалла исландского шпата расщепляется на два луча. Один луч подчиняется закону преломления, а второй – нет. Бартолин назвал эти лучи **обыкновенный** и **необыкновенный**, соответственно. При этом он обнаружил, что при падении

в определенном направлении в кристалле исландского шпата луч не раздваивается. Даже при нормальном падении необыкновенный луч отклоняется от первоначального направления, и, кроме того, этот луч, как правило, не лежит в одной плоскости с падающим лучом и перпендикуляром, проведенным в точку падения луча (рис. 4.4).

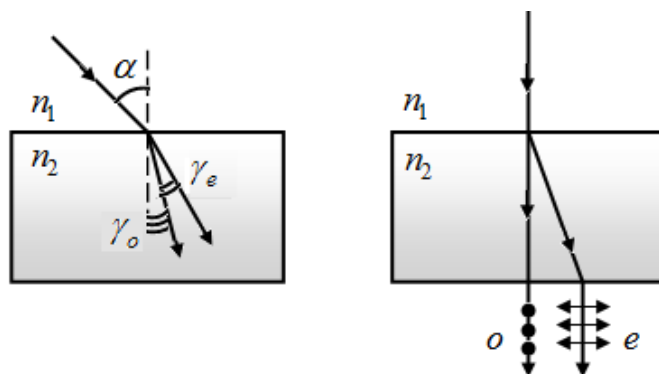


Рисунок 4. 4 – Двойное лучепреломление

Объяснение этому явлению дал голландский ученый Христиан Гюйгенс (1629–1695) (рис. 4.2, з). Он показал, что явление связано с анизотропией кристалла. Направление, вдоль которого падающий луч не раздваивается, он назвал *оптической осью*, а кристаллы, имеющие одну оптическую ось, – *одноосными кристаллами* (исландский шпат, кальцит, турмалин).

Оптические свойства одноосного кристалла одинаковы вдоль всех направлений, образующих один и тот же угол с оптической осью. Любая плоскость, проходящая через оптическую ось, называется *главным сечением кристалла*. Чаще всего пользуются главным сечением, проходящим через световой луч. Существуют кристаллы, у которых имеются две оптические оси. Такие кристаллы называют *двуосными* (например, гипс, слюда). В таких кристаллах два луча необыкновенные и показатели преломления для них зависят от направления распространения. Исследования показали, что обыкновенный и необыкновенный лучи поляризованы во взаимно перпендикулярных направлениях. Плоскость поляризации обыкновенного луча перпендикулярна главному сечению кристалла, а в необыкновенном луче плоскость поляризации совпадает с главным сечением кристалла.

Понятия обыкновенный и необыкновенный лучи имеют смысл только при движении света внутри кристалла, поскольку после того, как лучи покидают кристалл, они отличаются только направлением поляризации (рис. 4.5).

В некоторых кристаллах один из лучей поглощается сильнее другого. Это явление носит название **дихроизм** (от греч. *dikhroos*, двухцветный). Сильным дихроизмом обладает, например, кристалл турмалина. В нем обыкновенный луч поглощается практически полностью на длине 1 мм. Таким же свойством обладает и **поляроид** – целлулоидная пленка, в которую введено большое количество одинаково ориентированных кристаллов сульфата йодистого хинина и в которой один из лучей поглощается на пути $\approx 0,1$ мм. Благодаря этому поляроид может быть использован как поляризатор.



Рисунок 4.5 - Двойное лучепреломление в кальците

Очень часто в качестве поляризатора используют **призму Николь** (сокращенно, **николь**), впервые изготовленную в 1828 г. шотландским физиком Уильямом Николем (1768–1851). Николь – это призма из исландского шпата (разновидность углекислого кальцита – CaCO_3), разрезанная по диагонали и склеенная канадским бальзамом. Показатель преломления канадского бальзама ($n = 1,54$) лежит между показателями преломления обыкновенного ($n_o = 1,658$) и необыкновенного ($n_e = 1,516$) лучей в стекле (рис. 4.6).

Углы падения лучей оказываются такими, что для обыкновенного луча на прослойке бальзама выполняется условие полного внутреннего отражения и луч уходит в сторону, а необыкновенный луч свободно проходит через прослойку и выходит из призмы. Кроме того, после отражения и преломления в призме лучи оказываются поляризованными во взаимно перпендикулярных плоскостях. Двойное лучепреломление объясняется анизотропией кристаллов, т. е. различием свойств по различным направле-

ниям кристалла. В таких кристаллах диэлектрическая проницаемость ε зависит от направления. В одноосных кристаллах диэлектрическая проницаемость в направлении оптической оси ε_{\parallel} и в направлениях перпендикулярных к ней ε_{\perp} имеет разные значения. Поскольку показатель преломления $n = \sqrt{\varepsilon\mu}$, а в диэлектриках $\mu \approx 1$, то $n \approx \sqrt{\varepsilon}$. Следовательно, из анизотропии ε вытекает, что электромагнитные волны разных направлений колебаний вектора \vec{E} имеют разный показатель преломления ($n_{\parallel} = \sqrt{\varepsilon_{\parallel}}$ и $n_{\perp} = \sqrt{\varepsilon_{\perp}}$), и, следовательно, разную скорость распространения.

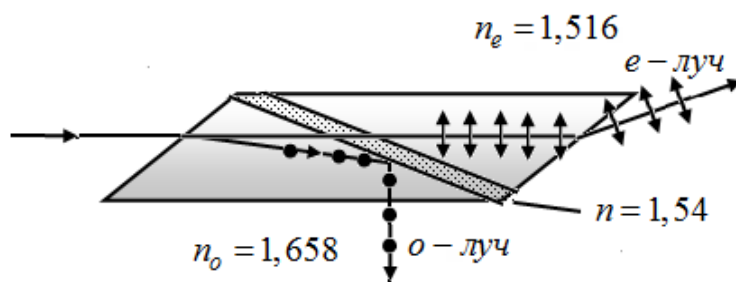


Рисунок 4.6 – Призма Николя

В зависимости от направления распространения скорость необыкновенного луча может меняться, становясь больше, меньше или равной скорости распространения обыкновенного луча. В соответствии с этим одноосные кристаллы характеризуются показателем преломления обыкновенного луча $n_o = \frac{c}{v_o}$ и показателем преломления необыкновенного луча $n_e = \frac{c}{v_e}$. В зависимости от того, какая из скоростей v_o или v_e больше, различают положительные и отрицательные одноосные кристаллы. При условии, когда $v_o \geq v_e$ кристалл **положительный**, $v_o \leq v_e$ – **отрицательный** (рис. 4.7).

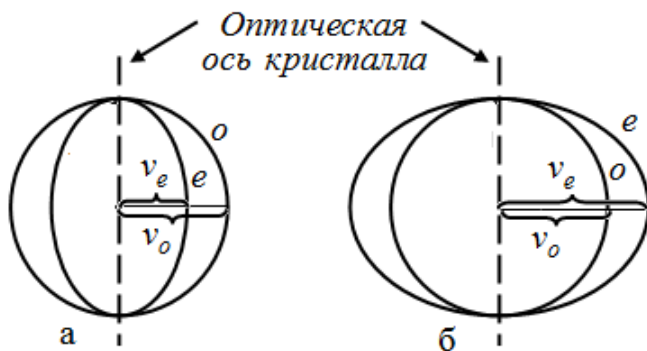


Рисунок 4.7 - Положительный (а) и отрицательный (б) одноосные кристаллы

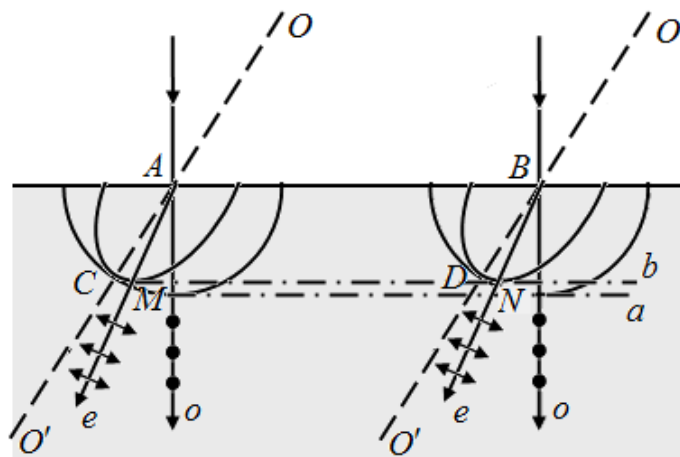


Рисунок 4.8 - Волновые поверхности
обыкновенного и необыкновенного лучей

Явление двойного лучепреломления и появление обыкновенного и необыкновенного лучей можно пояснить построением на основе принципа Гюйгенса (рис. 4.8). Если свет падает на поверхность анизотропного кристалла нормально его преломляющей грани, оптическая ось OO' кристалла идет под углом к направлению падения луча. Если кристалл положительный, то из точек падения луча на грань A и B распространяются сферические волны, соответствующие o -обыкновенному лучу, и эллипсоидальные – необыкновенному e -лучу. В точках C и D , лежащих на оптических осях OO' , эти поверхности пересекаются. По принципу Гюйгенса огибающие этих волновых поверхностей представляют собой фронты этих волн: касательная a к сферам есть фронт обыкновенной волны, а касательная к эллипсоидам b – фронт необыкновенной волны. Прямые AM и BN , проведенные к точкам касания эллипсоидов и касательной (точки M и N) – это направления распространения необыкновенного луча.

5. Искусственное двойное лучепреломление

Двойное лучепреломление может возникать в прозрачных изотропных телах, а также в кристаллах кубической кристаллографической системы при определенных внешних воздействиях: механической деформации, электрического и магнитного полей. Под действием указанных воздействий анизотропное вещество приобретает свойства одноосного кристалла, оптическая ось которого совпадает с направлением деформации, напряженности электрического или магнитного полей соответственно. Возникающая при

этом оптическая анизотропия характеризуется разностью показателей преломления обыкновенного n_o и необыкновенного n_e лучей в направлении перпендикулярном оптической оси.

а) Явление возникновения оптической анизотропии под влиянием одностороннего сжатия или растяжения, например, в кристаллах кубической симметрии или в стекле, – **фотоэластический эффект** (рис. 4.9).

Мерой возникающей оптической анизотропии служит разность коэффициентов преломления обыкновенного n_o и необыкновенного n_e лучей в направлении, перпендикулярном главной оптической оси.

Опыт показывает, что эта разность пропорциональна механическому напряжению $\sigma = \frac{dF}{dS}$ в данной точке тела:

$$n_o - n_e = k\sigma, \quad (4.6)$$

где k – коэффициент пропорциональности, зависящий от свойств вещества.

Если между двумя поляризаторами (второй поляризатор часто называют анализатором), поместить пластинку, изготовленную из изотропного материала, например, стекла, то в отсутствии механической деформации свет через них проходить не будет. Если же стекло деформировать, то свет может проходить, а полученное на экране изображение получится цветным. По распределению и положению цветных полос можно делать выводы о распределении напряжений в стеклянной пластине. Это явление широко используется для определения прочности образцов.

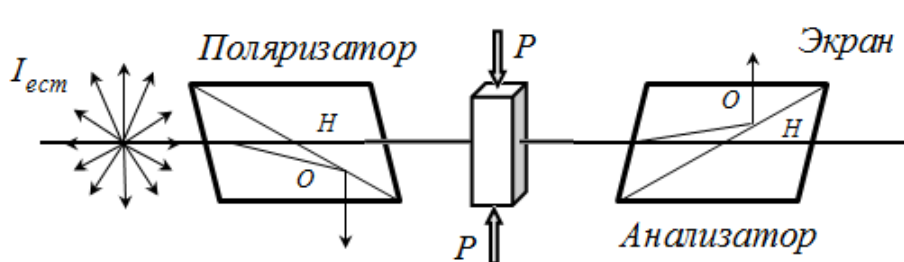


Рисунок 4.9 – Фотоэластический эффект

б) Явление возникновения искусственной анизотропии в изотропных средах под воздействием электрического поля – **электрооптический эффект** или **эффект Керра**. Был открыт шотландским физиком Джоном Керром (1824–1907) в 1875 г. (рис. 4.11, а).

Впервые двойное лучепреломление под влиянием электрического поля наблюдалось в твердых диэлектриках, помещенных между пластинами заряженного конденсатора. Однако было сомнение, что роль электрического поля является косвенной, и возникающий оптический эффект связан с механической деформацией под влиянием электрического поля. Влияние непосредственно электрического поля было обнаружено Керром в жидкостях, в которых статическое сжатие не вызывает появления анизотропии. Впоследствии (в 1930 г.) эффект Керра наблюдался и для газов.

Эффект Керра можно наблюдать, поместив между поляризаторами P и P' кювету K с жидкостью – так называемую **ячейку Керра** (рис. 4.10). В жидкость (в опытах часто используют нитробензол) погружены пластины плоского конденсатора, между которыми создается разность потенциалов. В результате жидкость становится двупреломляющей, и луч, проходя через конденсатор, расщепляется на два – обыкновенный и необыкновенный. Разность показателей преломления для этих лучей определяется как

$$n_o - n_e = B\lambda E^2, \quad (4.7)$$

где λ – длина волны света, E – напряженность поля в конденсаторе, B – константа Керра.

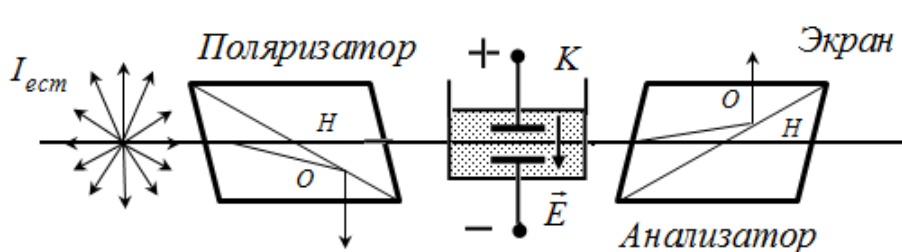


Рисунок 4.10 – Электрооптический эффект

Эффект Керра объясняется тем, что при включении электрического поля происходит поляризация молекул вещества, обладающих собственными либо наведенными полем дипольными моментами, и их выстраивание по полю. Это и создает анизотропию вещества с преимущественным направлением – оптической осью – вдоль электрического поля.

Важной особенностью эффекта Керра обуславливающей его широкое применение, является его малая инерционность ($\sim 10^{-12}$ с). Это позволяет осуществить практически безынерционный оптический затвор, с помощью которого можно изучать очень быстро протекающие процессы. Кроме того,

этот эффект используется для создания сверхкоротких световых импульсов, что позволяет определять в лабораторных условиях скорость света, а также для управления работой лазеров с целью получения сверхкоротких импульсов огромной мощности.

Еще одной разновидностью электрооптического эффекта является **эффект Погкельса**, названный в честь открывшего его в 1893 г. немецкого физика Фридриха Погкельса (1865–1913) (рис. 4.11, б). Если эффект Керра зависит квадратично от напряженности электрического поля $\sim E^2$, то эффект Погкельса линейно зависит от E . Высокая безинерционность этого эффекта позволяет использовать ячейку Погкельса для создания быстродействующих оптических затворов в высокочастотных модуляторах света.

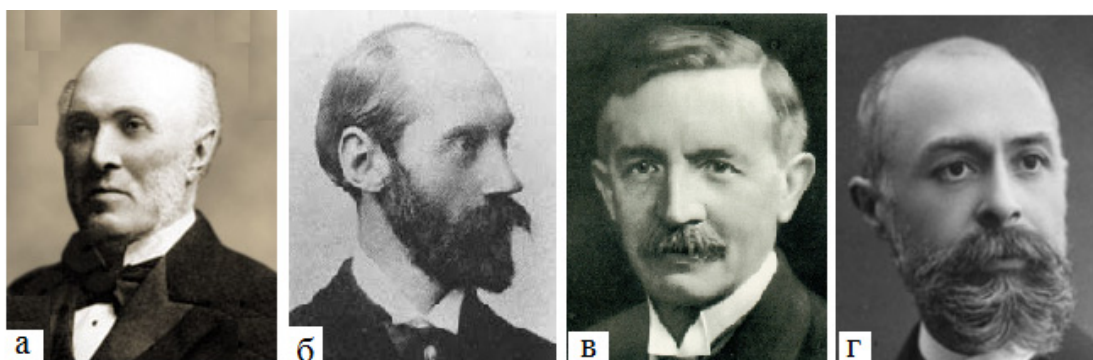


Рисунок 4.11 – Джон Керр (а), Фридрих Погкельс (б),
Эме Коттон (в), Анри Мутон (г)

в) Явление возникновения искусственной анизотропии в изотропных средах под воздействием магнитного поля – **магнитооптический эффект**.

Если вещество, частицы которого обладают постоянными магнитными моментами, находится в сильном магнитном поле, то в нем при распространении света поперек вектора индукции магнитного поля наблюдается расщепление света на обыкновенный и необыкновенный лучи – это **эффект Коттона-Мутона**. Эффект назван в честь французских физиков Эме Коттона (1869–1951) и Анри Мутона (1869–1935), открывших его в 1907 г. (рис. 4.12, в, г).

Если линейно поляризованный свет распространяется вдоль маг-

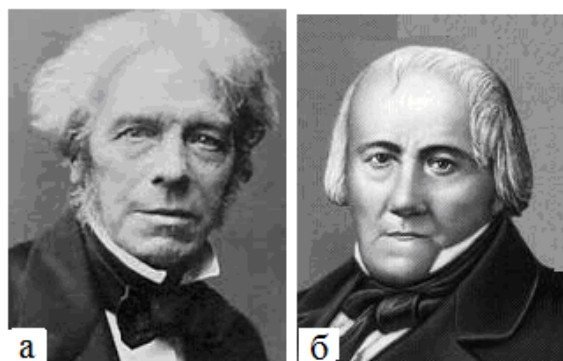


Рисунок 4.12 – Майкл Фарадей (а),
Жан-Батист Био (б)

нитного поля через оптически неактивное вещество, находящееся в этом поле, то возникают две волны поляризованные по кругу и имеющие разные показатели преломления. Наблюдаемое явление носит название **эффекта Фарадея** в честь обнаружившего его в 1845 г. английского физика М. Фарадея (1791–1867) (рис. 4.12, а).

6. Вращение плоскости поляризации. Сахариметр

Некоторые вещества, называемые **оптически активными**, обладают способностью вызывать вращение плоскости поляризации проходящего через них линейно поляризованного света. К их числу относятся кристаллические тела (кварц, киноварь), чистые жидкости (скипидар, никотин) и растворы оптически активных веществ в неактивных растворителях (водные растворы сахара, винной кислоты и т. д.). Различают **правое вращение**, когда вещество поворачивает плоскость поляризации по часовой стрелке (для наблюдателя, смотрящего навстречу световому лучу), и **левое** – при вращении плоскости поляризации в обратном направлении.

Для растворов зависимость угла поворота плоскости поляризации определяется **законом Био**, установленным в 1815 г. французским физиком Жаном-Батистом Био (1774–1862) (рис. 4.12, б). Согласно этому закону угол поворота плоскости поляризации пропорционален толщине слоя раствора l и молярной концентрации C оптически активного вещества:

$$\varphi = [\alpha] \cdot l \cdot C, \quad (4.8)$$

где $[\alpha]$ – **постоянная вращения (удельное вращение или удельная оптическая активность)**.

Постоянная вращения $[\alpha]$ определяется природой вещества, слабо зависит от температуры и существенно – от длины волны: $[\alpha] \sim \lambda^{-2}$. Обычно величина удельного вращения определяется для желтой линии натрия.

Зависимость угла поворота плоскости колебаний плоскополяризованного света от концентрации оптически активных растворов позволяет быстро и надежно определять их концентрацию. Приборы, применяемые для этой цели, называются **поляриметрами** или **сахариметрами**.

Для определения концентрации оптически активных веществ в монохроматическом свете используют поляриметры. Поляриметр, который позволяет определять концентрацию сахара в растворе, называют сахариметром.

метром. Оптическая схема сахариметра-поляриметра показана на рис. 4.13. Свет от источника (1) проходит светофильтр (2), фокусируется линзой (3) и попадает в поляризатор (4). Между скрещенными поляризатором 4 и анализатором 5 (установленными так, что колебания не проходят) помещают трубку с раствором активного вещества 6 (рис. 4.11). В результате поворота плоскости поляризации поле зрения просветляется. Для определения угла поворота надо повернуть анализатор до получения первоначального состояния поля зрения. Если известны постоянная вращения и угол поворота, то концентрацию легко рассчитать по формуле закона Био.

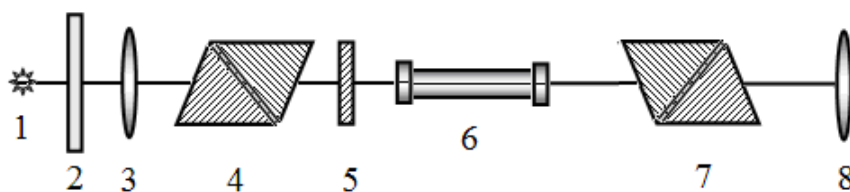


Рисунок 4.13 - Оптическая схема поляриметра: 1- источник света; 2- светофильтр; 3 - объектив; 4 - поляризатор; 5 - кварцевая пластина; 6 - кювета; 7 - анализатор; 8 - окуляр

В случае химически чистого вещества или кристаллических оптически активных веществ закон Био принимает форму:

$$\varphi = \alpha \cdot l, \quad (4.9)$$

где φ – угол поворота плоскости поляризации, l – толщина слоя вещества, α – коэффициент, называемый постоянной вращения (удельным вращением или вращательной способностью), который зависит от природы вещества, длины волны света и температуры. Например, для кварца удельное вращение изменяется в спектральном диапазоне $\lambda = 0,76 - 0,4$ мкм от 12,7 до 51 град/мм. Для кристаллов удельное вращение принято рассчитывать на 1 мм пути луча, а не на 10 см, как для жидкостей.

Для чистой оптически активной жидкости закон Био записывается в виде

$$\varphi = [\alpha] l \rho, \quad (4.10)$$

где ρ – плотность жидкости.

Удельная оптическая активность, как кристаллов, так и жидкостей, зависит от таких внешних факторов, как температура, давление, состав растворителя.

7. Применение явления поляризации

1. **Поляризационная микроскопия.** Поляризационный микроскоп снабжен двумя поляризационными призмами или двумя поляроидами. Кроме того, а последнее время в поляризационные микроскопы вводят специальные поляризационные компенсаторы, значительно повышающие чувствительность и контраст. С помощью микроскопов с компенсаторами были обнаружены и сфотографированы такие мелкие и неконтрастные объекты, как внутриклеточные двоякопреломляющие структуры и детали строения ядер клетки, которые невозможно обнаружить другим способом.

2. **Поляризационные линзы** в очках, светофильтры в фотоаппаратах и пр. применяются для подавления отраженного света, например, когда свет отражается от снежного покрова, поверхности воды, стекла и образует блики, которые мешают нормально видеть предмет или ухудшают качество фотографий.

3. **Кристаллографические исследования.** Многие кристаллы и ориентированные полимерные материалы обладают двойным лучепреломлением и дихроизмом. Изучая эти характеристики и определяя направление соответствующих осей, можно проводить идентификацию материалов, а также получать данные о химической структуре различных веществ.

4. **Фотоупругий анализ.** Это метод, позволяющий по сдвигу фаз судить о механических напряжениях. Основная часть установки для фотоанализа – полярископ, состоящий из осветительной системы, поляризатора, анализатора и окуляра. Если плоскую стеклянную полосу подвергнуть растяжению, то стекло окажется несколько деформированным, в нем возникнут механические напряжения. При деформации прозрачный объект становится двоякопреломляющим и будет сдвигать фазу световой волны. Измеряя сдвиг фазы, можно определить величину механического напряжения. Этот метод применяется не только в технике, но и в медицине, например, в офтальмологии, так как в оболочках глаза обнаружены фотоупругие явления.

5. **Устройство жидкокристаллического монитора.** ЖК-монитор состоит из слоя молекул между двумя прозрачными электродами и двух поляризационных фильтров, плоскости поляризации которых перпендикулярны. В отсутствие жидких кристаллов свет, пропускаемый первым фильтром, практически полностью блокируется вторым. Молекулы в отсутствие электрического напряжения между электродами выстраиваются

в винтовую структуру, при этом до второго фильтра плоскость поляризации поворачивается на 90° , и свет через вертикальный фильтр проходит уже без потерь. Если же к электродам приложено напряжение, молекулы стремятся выстроиться в направлении поля, что искажает винтовую структуру. При достаточной величине поля практически все молекулы становятся параллельны, что приводит к непрозрачности структуры. Изменяя напряжение между электродами, можно управлять световым потоком, проходящим через монитор. При этом светятся не дисплеи мониторов компьютеров, телевизоров, мобильных телефонов и пр., а тонкий слой жидкого кристалла, формирующий изображение.

II. ЗАДАЧИ

Задача 4.1

Определить степень поляризации частично поляризованного света, если амплитуда светового вектора, соответствующая максимальной интенсивности света в 2 раза больше амплитуды, соответствующей минимальной интенсивности.

Решение

Степень поляризации (4.1) определяется как

$$P = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}},$$

где I_{\max} и I_{\min} – максимальная и минимальная интенсивности частично поляризованного света, пропускаемого анализатором, соответственно.

Поскольку интенсивность светового вектора пропорциональна квадрату амплитуды, то $I_{\max} \sim A_{\max}^2$, а $I_{\min} \sim A_{\min}^2$. Принимая во внимание, что $A_{\max} = 2A_{\min}$, получим

$$P = \frac{A_{\max}^2 - A_{\min}^2}{A_{\max}^2 + A_{\min}^2} = \frac{4A_{\min}^2 - A_{\min}^2}{4A_{\min}^2 + A_{\min}^2} = \frac{3A_{\min}^2}{5A_{\min}^2} = \frac{3}{5} = 0,6.$$

Задача 4.2

Степень поляризации частично поляризованного света составляет 0,8. Определить отношение максимальной интенсивности света, пропускаемого анализатором, к минимальной интенсивности.

Решение

Разделим выражение (4.1) для степени поляризации на I_{\min} и получим

$$P = \frac{(I_{\max}/I_{\min}) - 1}{(I_{\max}/I_{\min}) + 1}.$$

Выразим из него отношение I_{\max}/I_{\min}

$$\frac{I_{\max}}{I_{\min}} = \frac{1+P}{1-P} = \frac{1+0,8}{1-0,8} = \frac{1,8}{0,2} = 9.$$

Задача 4.3

Какова степень поляризации света, если он представляет собой смесь естественного света и плоскополяризованного света равной интенсивности.

Решение

Пусть интенсивность плоскополяризованного света I_n , а естественного света I_e . Поляризатор полностью пропускает плоскополяризованный свет и половину интенсивности естественного света. Тогда максимальная интенсивность света с учетом равенства интенсивностей $I_n = I_e$ составит

$$I_{\max} = I_n + 0,5I_e = I_n + 0,5I_n = 1,5I_n.$$

Минимальная интенсивность равна

$$I_{\min} = 0,5I_e = 0,5I_n.$$

Степень поляризации

$$P = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} = \frac{1,5I_n - 0,5I_n}{1,5I_n + 0,5I_n} = 0,5.$$

Задача 4.4

Естественный свет проходит через два поляризатора. Ось первого поляроида расположена вертикально, а второго – повернута на угол 30° . Какая часть падающего света останется после второго поляризатора?

Решение

Световое колебание, параллельное плоскости поляризатора, несет долю интенсивности равную $\cos^2 \varphi$. Поскольку в естественном свете все значения φ равновероятны, то интенсивность света, прошедшего через поляри-

затор, равна среднему значению $\cos^2 \varphi$, а, именно, $\frac{1}{2}$. На второй поляризатор падает уже плоскополяризованный свет $I_{nn} = \frac{1}{2} I_{ест}$, поэтому интенсивность прошедшего света по закону Малюса (4.2) определится как $I = I_{nn} \cos^2 \varphi$.

Следовательно, в результате прохождения двух поляризаторов

$$I = \frac{1}{2} I_{ест} \cdot \cos^2 \varphi.$$

$$\frac{I}{I_{ест}} = \frac{1}{2} \cdot \cos^2 \varphi = \frac{1}{2} \cdot \cos^2 30^\circ = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 = \frac{3}{8} = 0,375.$$

Задача 4.5

Определить угол между главными плоскостями поляризатора и анализатора, если после их прохождения интенсивность естественного света уменьшилась в 5 раз.

Решение

Закон Малюса позволяет найти интенсивность света, прошедшего через поляризатор, как $I_1 = I_{ест} \cos^2 \varphi$. Поляризатор пропускает колебания параллельные его главной плоскости и полностью задерживает те, которые перпендикулярны ей. Поскольку для естественного света все плоскости колебаний светового вектора равновероятны, то угол φ принимает равновероятно значения от 0 до 2π . Это означает, что среднее значение $\cos^2 \varphi = \frac{1}{2}$, а естественный свет после прохождения через поляризатор ослабляется в 2 раза и становится плоскополяризованным, т. е. $I_1 = I_{nn}$.

Тогда после первого поляризатора $I_{nn} = \frac{1}{2} I_{ест}$.

Теперь на второй поляризатор, называемый анализатором, падает плоскополяризованный свет. Интенсивность света после прохождения через анализатор по закону Малюса составляет

$$I = I_{nn} \cos^2 \varphi_1,$$

где φ_1 – угол между плоскостью поляризатора и плоскостью поляризации светового луча или фактически искомый угол между плоскостями поляризатора и анализатора.

Так как по условию задачи интенсивность уменьшилась в 5 раз, то $I_{есм} = 5I$, то

$$I = I_{nn} \cos^2 \varphi_1 = \frac{1}{2} I_{есм} \cos^2 \varphi_1 = \frac{1}{2} \cdot 5I \cos^2 \varphi_1,$$

$$\cos^2 \varphi_1 = \frac{2}{5}, \quad \cos \varphi_1 = \sqrt{\frac{2}{5}} = 0,632$$

$$\varphi_1 = \arccos 0,63 = 50,8^\circ$$

Задача 4.6

Естественный свет проходит через два николя, образующих угол 30° . Каждый николь ослабляет интенсивность падающего на него света на 10 %. Найти, во сколько раз ослабляется свет после прохождения двух николей.

Решение

Интенсивность света, прошедшего через первый николь составляет

$$I_1 = (1 - k_1) \frac{1}{2} I_{есм},$$

где коэффициент поглощения $k_1 = 0,1$, поскольку потеря интенсивности после прохождения первого николя по условию задачи равна 10 %.

Интенсивность луча, прошедшего через второй николь, по закону Малюса с учетом поглощения света во втором николе равна

$$I_2 = (1 - k_2) I_1 \cos^2 \varphi = (1 - k_1)(1 - k_2) \frac{1}{2} I_{есм} \cos^2 \varphi.$$

Принимая во внимание, что $k_1 = k_2 = k = 0,1$, получаем

$$I_2 = (1 - k)^2 \frac{I_{есм} \cdot \cos^2 \varphi}{2}.$$

И, окончательно,

$$\frac{I_{\text{ест}}}{I_2} = \frac{2}{(1-k)^2 \cos^2 \varphi} = \frac{2}{(1-0,1)^2 \cdot \cos^2 30^\circ} = 3,3.$$

Задача 4.7

Естественный свет проходит через два николя, главные плоскости которых образуют угол 60° . Каждый из николей поглощает 5 % и отражает 10 % падающего света. Определить, во сколько раз уменьшится интенсивность света после прохождения двух николей.

Решение

Поскольку коэффициенты поглощения и отражения равны $k_1 = 0,05$ и $k_2 = 0,1$, соответственно, то интенсивность света после первого николя равна

$$I_1 = [1 - (k_1 + k_2)] \frac{1}{2} I_{\text{ест}},$$

а после второго николя с учетом поглощения и отражения

$$I_2 = [1 - (k_1 + k_2)]^2 \frac{I_{\text{ест}} \cdot \cos^2 \varphi}{2}.$$

Уменьшение интенсивности после прохождения двух николей составит

$$\frac{I_{\text{ест}}}{I_2} = \frac{2}{[1 - (k_1 + k_2)]^2 \cos^2 \varphi} = \frac{2}{[1 - (0,05 + 0,1)]^2 \cdot \cos^2 60^\circ} = 11,1.$$

Задача 4.8

Естественный свет проходит через поляризатор и анализатор, расположенные так, что угол между их главными плоскостями равен φ . Как поляризатор, так и анализатор, поглощают и отражают 8 % падающего на них света. Оказалось, что интенсивность луча, вышедшего из анализатора, равна 9 % интенсивности естественного света, падающего на поляризатор. Найти угол φ .

Решение

Интенсивность света после прохождения поляризатора (с учетом поглощения и отражения) равна

$$I_1 = (1 - k_1) \frac{1}{2} I_{есм}.$$

После прохождения анализатора интенсивность уменьшается как за счет отражения и поглощения в анализаторе, так и за счет несовпадения плоскости колебаний светового вектора с плоскостью анализатора. Как результат, интенсивность света после анализатора по закону Малюса составляет

$$I_2 = I_1 (1 - k_2) \cos^2 \varphi.$$

С учетом того, что для поляризатора и анализатора по условиям задачи $k_1 = k_2 = k = 0,08$, получим

$$I_2 = I_1 (1 - k_2) \cos^2 \varphi = \frac{1}{2} I_{есм} (1 - k_1) (1 - k_2) \cos^2 \varphi = \frac{I_{есм} (1 - k)^2 \cos^2 \varphi}{2}.$$

Поскольку интенсивность луча, вышедшего из анализатора, равна 9 % интенсивности естественного света, падающего на поляризатор, то

$$\frac{I_2}{I_{есм}} = \eta = 0,09. \text{ А значит,}$$

$$\frac{I_2}{I_{есм}} = \frac{I_{есм} (1 - k)^2 \cos^2 \varphi}{2 \cdot I_{есм}} = \frac{(1 - k)^2 \cos^2 \varphi}{2} = \eta.$$

$$\cos \varphi = \frac{\sqrt{2\eta}}{1 - k} = \frac{\sqrt{2 \cdot 0,09}}{1 - 0,08} = 0,46.$$

Искомый угол между главными сечениями поляризатора и анализатора $\varphi = \arccos 0,46 = 62,5^\circ$.

Задача 4.9

Угол падения света на отражающую поверхность постоянно меняется. Обнаружено, что отраженный луч является полностью поляризованным при угле падения 48° . Определить показатель преломления отражающего материала.

Решение

По закону Брюстера тангенс угла падения, при котором отраженный луч полностью поляризован (угол Брюстера), равен

$$\operatorname{tg} \alpha_B = \frac{n_2}{n_1} = n_{21},$$

где n_{21} – показатель преломления второй среды (n_2) относительно первой (n_1).

Если луч падает из воздушной среды $n_1 = 1$ и закон Брюстера имеет вид

$$\operatorname{tg} \alpha_B = n.$$

Таким образом, показатель преломления материала

$$n = \operatorname{tg} 48^\circ = 1,11.$$

Задача 4.10

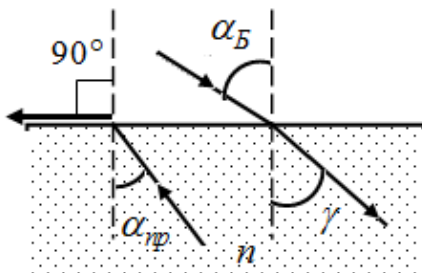
Определить угол Брюстера для падения лучей из воздуха на поверхность стекла, если известно, что предельный угол полного внутреннего отражения для этой границы раздела составляет 42° .

Решение

Явление полного внутреннего отражения наблюдается, когда луч света переходит из оптически более плотной среды (стекла) с показателем преломления $n_2 = n$ в менее плотную среду (воздух), для которого $n_1 = 1$.

В этом случае синус угла полного внутреннего отражения равен

$$\sin \alpha_{np} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{1}{n}.$$



Угол Брюстера – это угол падения луча, при котором луч, отраженный от оптически более плотной среды, является полностью поляризованным. По закону Брюстера тангенс этого угла равен

$$\operatorname{tg} \alpha_B = \frac{n_2}{n_1} = \frac{n_2}{1} = n.$$

Отсюда следует, что

$$\operatorname{tg} \alpha_B = \frac{1}{\sin \alpha_{np}}.$$

Угол Брюстера

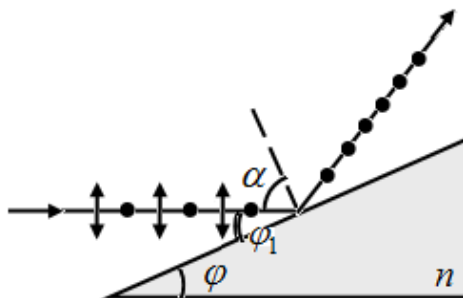
$$\alpha_B = \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{\sin \alpha_{np}} \right) = \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{\sin 42^\circ} \right) = \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{0,669} \right) = \operatorname{arctg}(1,494) = 56,21^\circ.$$

Задача 4.11

Пучок естественного света горизонтально падает на стеклянную ($n = 1,5$) призму параллельно ее основанию. Определить двугранный угол φ призмы, если отраженный пучок максимально поляризован.

Решение

Поскольку отраженный луч полностью поляризован, то угол падения луча на грань призмы равен углу Брюстера $\alpha = \alpha_B$. По закону Брюстера в случае падения на границу раздела «воздух-стекло»:



$$\operatorname{tg} \alpha_B = n,$$

где $n = 1,5$ – показатель преломления стекла.

Угол падения

$$\alpha_B = \operatorname{arctg} n = \operatorname{arctg} 1,5 = 56,3^\circ.$$

Угол $\varphi_1 = \varphi$ (как накрест лежащие углы между двумя параллельными прямыми и секущей), а $\varphi_1 = 90^\circ - \alpha_B$, следовательно,

$$\varphi = \varphi_1 = 90^\circ - \alpha_B = 90^\circ - 56,3^\circ = 33,7^\circ.$$

Задача 4.12

В результате падения на пластинку из кварца перпендикулярно его оптической оси плоскополяризованный свет вследствие явления двойного лучеиспускания расщепляется на два луча. Определить показатели пре-

ломления кварца для обыкновенного (n_o) и необыкновенного (n_e) лучей, если в кварце длины волн этих лучей равны $\lambda_o = 344$ нм и $\lambda_e = 341$ нм, соответственно, а длина волны света в воздухе $\lambda_{\text{вак}} = 530$ нм.

Решение

По определению абсолютный показатель преломления есть отношение скорости света в вакууме к скорости света в среде $n = \frac{c}{v}$. Учитывая то, что длина волны зависит от скорости волны и ее частоты ν , длины волн в вакууме и среде можно выразить как $\lambda_{\text{вак}} = \frac{c}{\nu}$ и $\lambda_{\text{ср}} = \frac{v}{\nu}$, соответственно, тогда абсолютный показатель преломления равен

$$n = \frac{\lambda_o}{\lambda_{\text{ср}}}.$$

Для обыкновенного и необыкновенного лучей можно записать:

$$\begin{cases} n_o = \frac{\lambda_{\text{вак}}}{\lambda_o}, \\ n_e = \frac{\lambda_{\text{вак}}}{\lambda_e}. \end{cases}$$

Подстановка численных значений дает

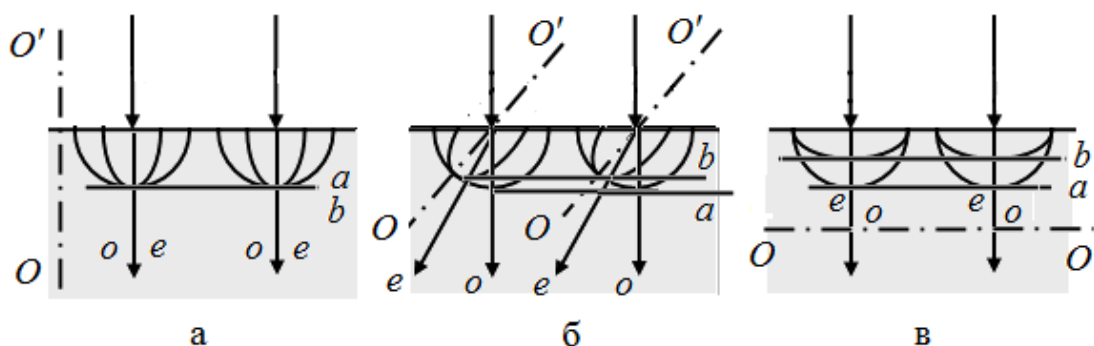
$$\begin{cases} n_o = \frac{530}{344} = 1,541, \\ n_e = \frac{530}{341} = 1,554. \end{cases}$$

Задача 4.13

Используя принцип Гюйгенса, объяснить распространение обыкновенных и необыкновенных волн в случае, когда свет падает нормально к поверхности одноосного положительного кристалла, а оптическая ось кристалла и его преломляющая поверхность: а) перпендикулярны; б) образуют некоторый угол; в) параллельны друг другу. Ответ проиллюстрировать графически.

Решение

Двойное лучепреломление – это явление, при котором луч, распространяющийся в анизотропном веществе во всех направлениях, кроме одного (оно называется оптической осью), расщепляется на два луча – обыкновенный и необыкновенный, отличающиеся скоростями распространения в данном веществе. Кристалл считается положительным, если скорость распространения необыкновенного луча меньше скорости обыкновенного луча, при этом, эллипсоид скоростей необыкновенного луча вытянут относительно оптической оси и вписан в сферу скоростей обыкновенного луча. На рисунках линия OO' – оптическая ось кристалла, буквами o и e отмечены обыкновенный и необыкновенный лучи, соответственно, а положения волнового фронта обозначены: a – для обыкновенного и b – для необыкновенного лучей.



а) В случае, когда оптическая ось перпендикулярна преломляющей грани кристалла, скорости и направления распространения обыкновенного и необыкновенного лучей одинаковы, $v_o = v_e$, и луч в кристалле не раздваивается.

б) Когда оптическая ось ориентирована под некоторым углом к преломляющей грани, углы преломления для обыкновенного и необыкновенного лучей отличаются. Луч обыкновенный распространяется в первоначальном направлении, не преломляясь, а необыкновенный – отклоняется от первоначального направления. Отличаются и скорости распространения этих лучей.

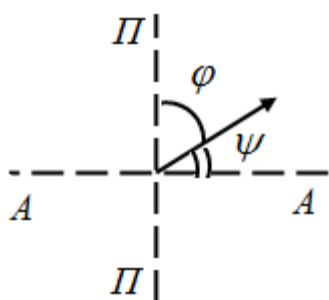
в) Если оптическая ось кристалла параллельна преломляющей грани кристалла, то лучи обыкновенный и необыкновенный будут двигаться с разными скоростями, но в первоначальном направлении, при этом, для рассматриваемого случая положительного кристалла $v_o > v_e$.

Задача 4.14

Определить, во сколько раз уменьшится интенсивность естественного света, если между двумя призмами Николя, скрещенными под углом 90° , помещена кварцевая пластинка толщиной $l = 3$ мм, вырезанная перпендикулярно оптической оси. Постоянную вращения кварца для используемой длины волны и температуры опыта принять равной $\alpha = 21$ град/мм.

Решение

Когда естественный свет попадает в призму Николя, то вследствие явления двойного лучепреломления он расщепляется на лучи обыкновенный и необыкновенный. Они равны друг другу по интенсивности и полностью плоскополяризованы в двух взаимно перпендикулярных плоскостях. При этом луч обыкновенный испытывает полное внутреннее отражение на слое канадского бальзама, которым склеены две половинки призмы, и не выходит из николя. Необыкновенный луч интенсивности $I_e = \frac{I_{есм}}{2}$ проходит сквозь первый николю.



В кварцевой пластинке происходит вращение плоскости поляризации необыкновенного плоскополяризованного луча на угол

$$\varphi = \alpha \cdot l = 21 \cdot 3 = 63^\circ.$$

Если $\Pi - \Pi$ – плоскость пропускания первого николя, а $A - A$ – второго, то световой вектор луча составляет угол $\psi = 90^\circ - \varphi = 90^\circ - 63^\circ = 27^\circ$ с направлением пропускания второго николя.

По закону Малюса интенсивность света после прохождения второго николя составляет

$$I_2 = I_1 \cos^2 \psi = I_e \cos^2 \psi = \frac{I_{есм}}{2} \cos^2 \psi,$$

откуда

$$I_2 = I_1 \cos^2 \psi = I_e \cos^2 \psi = \frac{I_{есм}}{2} \cos^2 \psi$$

$$\frac{I_{есм}}{I_2} = \frac{2}{\cos^2 \psi} = \frac{2}{\cos^2 27^\circ} = 2,52.$$

Задача 4.15

Между параллельными николями поместили пластинку кварца толщиной 2 мм, вследствие чего плоскость поляризации монохроматического света повернулась на угол 30° . Найти наименьшую толщину пластинки, при которой поле зрения поляриметра станет совершенно темным.

Решение

Если свет проходит через слой вещества толщиной l , то угол поворота плоскости поляризации определяется выражением (4.7) $\varphi = \alpha \cdot l$, где α – постоянная вращения. Тогда

$$\alpha = \frac{\varphi}{l}.$$

Свет не будет проходить через поляризатор, если плоскость поляризатора повернуть на угол 90° . В этом случае

$$\varphi_1 = \alpha \cdot l_{\min}.$$

Минимальная толщина равна

$$l_{\min} = \frac{\varphi_1}{\alpha} = \frac{\varphi_1 \cdot l}{\varphi} = \frac{90^\circ \cdot 2}{30^\circ} = 6 \text{ мм}.$$

Задача 4.16

Определить удельное вращение $[\alpha]$ для раствора сахара, если при прохождении света через трубку с сахарным раствором, концентрация которого $C = 0,33 \text{ г/см}^3$, угол поворота плоскости поляризации равен $\varphi = 22^\circ$, а длина трубки сахариметра $l = 10 \text{ см}$.

Решение

По закону Био угол поворота плоскости поляризации определяется как

$$\varphi = [\alpha] Cl,$$

где концентрация раствора $C = 0,33 \text{ г/см}^3 = 330 \text{ кг/м}^3$, а длина трубки $l = 0,1 \text{ м}$.

Отсюда удельное вращение равно

$$[\alpha] = \frac{\varphi}{Cl} = \frac{22^\circ}{330 \cdot 0,1} = 0,67 \text{ град} \cdot \text{м}^2/\text{кг}.$$

Задача 4.17

Жидкий никотин, содержащийся в трубке поляриметра длиной $l = 10$ см, имеет плотность $\rho = 1010$ кг/м³. Определить удельное вращение никотина $[\alpha]$, если образец поворачивает плоскость поляризации желтого света натрия на угол $\varphi = 138^\circ$.

Решение

По закону Био угол поворота плоскости поляризации определяется как

$$\varphi = [\alpha] l \rho.$$

Тогда удельное вращение для никотина составит

$$[\alpha] = \frac{\varphi}{l \rho} = \frac{138}{0,1 \cdot 1010} = 1,366 \text{ град} \cdot \text{м}^2/\text{кг}.$$

III. КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

К4.1. Найти степень поляризации света, представляющего собой смесь естественного и плоскополяризованного света, если интенсивность поляризованного в 5 раз больше интенсивности естественного света. $[P = 0,833]$

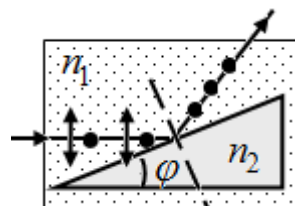
К4.2. Определить угол φ между плоскостями пропускания поляризатора и анализатора, если анализатор в два раза уменьшает интенсивность падающего на него света. Потерями интенсивности в поляризаторе и анализаторе пренебречь. $[\varphi = 45^\circ]$

К4.3. Угол падения света на границу раздела «воздух-жидкость» равен 52° , Определить угол преломления, если отраженный луч полностью поляризован. $[\gamma = 38^\circ]$

К4.4. Угол преломления для светового луча, падающего из воздуха на поверхность жидкости, равен 35° . Если отраженный луч полностью поляризован, то каков показатель преломления жидкости? $[n = 1,43]$

К4.5. Угол падения света на границу раздела «воздух-жидкость» равен 52° , Определить угол преломления, если отраженный луч полностью поляризован. $[\gamma = 36^\circ]$

К4.6. Алмазная призма с рассеивающим углом $\varphi = 30^\circ$ и показателем преломления $n_2 = 2,4$ находится в среде с показателем преломления n_1 . Пучок естественного света падает на призму параллельно ее горизонтальной грани. Определить показатель преломления n_1 среды, если отраженный пучок максимально поляризован. $[n_1 = 1,39]$



К4.7. Свет проходит через жидкость, падает под углом 42° на дно стеклянного ($n = 1,5$) сосуда и отражается от него. При этом отраженный луч является плоскополяризованным. Найти показатель преломления жидкости в сосуде. При каком угле падения света на дно сосуда будет наблюдаться явление полного внутреннего отражения? $[n_1 = 1,67; \alpha_{np} = 64,2^\circ]$

К4.8. Между двумя скрещенными под углом 90° николями поместили кварцевую пластинку. Найти ее толщину, соответствующую максимальному просветлению поля зрения. Постоянную вращения принять равной 27 град/мм. $[l = 5,8 \text{ мм}]$

К4.9. Найти толщину кварцевой пластины, помещенной между двумя поляризаторами, обеспечивающей поворот плоскости поляризации на 180° , если постоянная вращения для данной длины волны составляет $\alpha = 29,8$ град/мм. $[l = 6,04 \text{ мм}]$

К4.10. Угол поворота плоскости поляризации желтого света натрия при прохождении через трубку с раствором сахара составляет $\varphi = 36^\circ$. Длина трубки $l = 10$ см. Удельное вращение сахара $[\alpha] = 0,665$ град \cdot м²/кг. Определить концентрацию сахара в растворе. $[C = 541 \text{ кг/м}^3]$

К4.11. Если раствор глюкозы, находящийся в трубке поляриметра, концентрация которого $C_1 = 315$ кг/м³, поворачивает плоскость поляризации света на угол $\varphi_1 = 36^\circ$, определить, какова концентрация раствора глюкозы, поворачивающего плоскость поляризации на угол $\varphi_2 = 20^\circ$. $[C_2 = 175 \text{ кг/м}^3]$

Глава 5.

ЭЛЕМЕНТЫ СПЕЦИАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

I. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

1. Механический принцип относительности Галилея

Инерциальной системой отсчета (ИСО) называется такая система, по отношению к которой скорость материальной точки, свободной от внешних воздействий, сохраняется неизменной по величине и направлению. Любые две ИСО либо взаимно неподвижны, либо движутся относительно друг друга равномерно и прямолинейно.

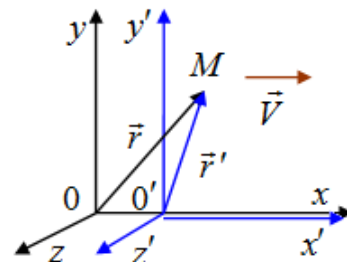


Рисунок 5.1 – Преобразования координат

Пусть имеются две ИСО, причем, ИСО' движется относительно ИСО со скоростью \vec{V} (рис. 5.1). Так как в классической физике свойства пространства и ход времени во всех ИСО одинаковы, то координаты точки М в этих системах связаны соотношениями, которые называются *преобразованиями Галилея* для координат:

$$\begin{cases} x' = x - Vt, \\ y' = y, \\ z' = z, \\ t' = t. \end{cases} \quad (5.1)$$

Радиус-вектор частицы

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{V}t. \quad (5.2)$$

Дифференцирование этого соотношения с учетом того, что при $t' = t$

$$\vec{v}' = \frac{d\vec{r}'}{dt'} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad (5.3)$$

позволяет получить *классический закон сложения скоростей*

$$\frac{d}{dt}(\vec{r}' - \vec{V}t) = \frac{d\vec{r}}{dt} - \vec{V} = \vec{v} - \vec{V}. \quad (5.4)$$

Для ускорения

$$\vec{a}' = \frac{d\vec{v}'}{dt'} = \frac{d\vec{v}'}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{v} - \vec{V}) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a}. \quad (5.5)$$

Равенство ускорений в обеих ИСО выражает тот факт, что ускорение инвариантно по отношению к преобразованиям Галилея (**инвариант** – величина, имеющая одинаковое численное значение во всех системах отсчета).

Силы взаимодействия материальных точек зависят от взаимного расположения (\vec{r}_{12}) и скоростей относительного движения точек (\vec{u}_{12}).

$$\left. \begin{aligned} \vec{r}'_{12} &= \vec{r}'_1 - \vec{r}'_2 = (\vec{r}_1 - \vec{V}t) - (\vec{r}_2 - \vec{V}t) = \vec{r}_1 - \vec{V}t - \vec{r}_2 + \vec{V}t = \vec{r}_{12} \\ \vec{u}'_{12} &= \vec{v}'_1 - \vec{v}'_2 = (\vec{v}_1 - \vec{V}) - (\vec{v}_2 - \vec{V}) = \vec{v}_1 - \vec{V} - \vec{v}_2 + \vec{V} = \vec{u}_{12} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \vec{F}' = \vec{F}. \quad (5.6)$$

Сила, действующая на материальную точку, инвариантна по отношению к преобразованиям Галилея.

Кроме того, считается, что уравнение II закона Ньютона $\vec{F} = m\vec{a}$ тоже инвариантно по отношению к преобразованиям Галилея. Следствием этого является **механический принцип относительности Галилея**: в любых инерциальных системах все механические явления при одних условиях протекают одинаково.

2. Постулаты специальной теории относительности

Появление специальной теории относительности (СТО) обусловлено развитием электродинамики и попытками применить механический принцип относительности Галилея к ее законам. Это привело к ряду противоречий. Например, из механического закона сложения скоростей скорость света в вакууме в подвижной и неподвижной ИСО должна различаться (т. е. $\vec{c}' = \vec{c} - \vec{V}$), а из уравнений Максвелла – должна оставаться постоянной ($c = 3 \cdot 10^8$ м/с).

Попытку обнаружить различия в скорости света в направлении движения Земли и перпендикулярном ему предприняли в 1881 и в 1887 годах А. А. Майкельсон (1852–1931) и Э. В. Морли (1838–1923), но экспериментально никаких различий обнаружено не было.

Противоречия между классическими механическими и электродинамическими подходами преодолел А. Эйнштейн (1879–1955) (рис. 5.2), решивший, что законы электродинамики верны, а необходимо изменить преобразования Галилея для случая скоростей близких к скорости света.

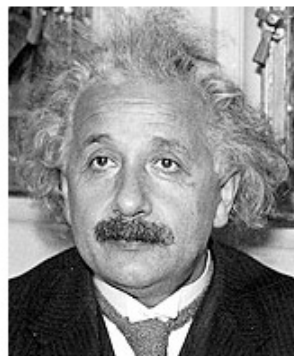


Рисунок 5.2 – Альберт Эйнштейн

Постулаты СТО:

1. **Принцип относительности Эйнштейна:** в любых ИСО все физические явления (механические, электродинамические и т. д.) в одинаковых условиях протекают одинаково.

2. **Принцип постоянства скорости света:** скорость света в вакууме не зависит от скорости движения источника и одинакова во всех направлениях и во всех ИСО, т. е. является универсальной постоянной.

3. Преобразования Лоренца и следствия из них

Преобразования Галилея не действуют, когда скорость объекта приближается к скорости света. Эйнштейн преобразования Галилея заменил преобразованиями Лоренца, которые были предложены в 1890 году нидерландским физиком Гендриком Антоном Лоренцом (1853–1928), Нобелевская премия 1902 г. (рис. 5.3). Пространство и время, отдельно существовавшие в классической физике, были заменены единым четырехмерным «пространством-временем».

$$\begin{cases} x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \\ y' = y, \\ z' = z, \\ t' = \frac{t - \frac{V}{c^2}x}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \end{cases} \quad (5.7)$$

где $\beta = \frac{V}{c}$ – есть отношения скорости движения системы к скорости света в вакууме.

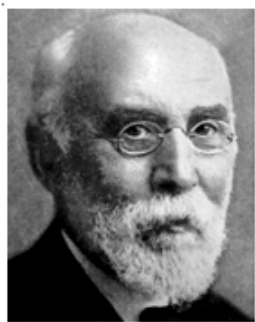


Рисунок 5.3 – Гендрик Лоренц

Следствия из преобразований Лоренца

1. Относительность одновременности: события, одновременные в одной ИСО не есть таковыми в других ИСО, движущихся относительно первой.

Это относится к событиям, причинно не связанным друг с другом, ибо события, одновременно происходящие в различных точках пространства, не оказывают влияния друг на друга. Если события причинно связаны, то во всех системах «причина» происходит раньше «следствия» (т. е. «рождение предшествует смерти»).

2. Относительность длин (расстояний): в ИСО, движущихся относительно друг друга со скоростью, близкой к скорости света в вакууме, наблюдается релятивистский эффект сокращения длины тел (в направлении их движения)

$$l = l_0 \sqrt{1 - \beta^2}, \quad (5.8)$$

где l – длина движущегося объекта, l_0 – **собственная длина** – длина объекта в ИСО, относительно которой он покоится.

3. Относительность промежутков времени: длительность промежутков времени между двумя неодновременными событиями, происходящими в одном и том же месте, в различных ИСО различна:

$$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (5.9)$$

где τ – длительность явления в движущейся системе, τ_0 – **собственное время** – длительность явления в неподвижной системе.

«Парадокс близнецов». Один из братьев-близнецов отправляется в космическое путешествие со скоростью близкой к скорости света, а другой остается на Земле. С точки зрения оставшегося брата, поскольку путешественник двигался относительно Земли с субсветовой скоростью, то у него замедлилось время, и годы, прошедшие на Земле, соответствуют мгновениям в космосе. Но с точки зрения путешественника, поскольку Земля двигалась относительно корабля с субсветовой скоростью, то земное собственное время проходило медленнее времени на борту корабля, и время путешест-

вия заняло меньшее количество лет, измеренных по земному времени. Парадокс объясняется неравноправностью систем отсчета. Если система отсчета, связанная с Землей, может считаться инерциальной, то систему, связанную с космическим кораблем, ускорившимся до скорости, близкой к скорости света, инерциальной считать нельзя. А это означает, что СТО, описывающая движение в инерциальных системах отсчета, к ней неприменима.

4. *Инвариантность интервала (релятивистского) между событиями*

$$\Delta s = \sqrt{c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2} = \sqrt{c^2 \Delta t^2 - \Delta l^2}, \quad (5.10)$$

где $\Delta l = \sqrt{\Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2}$ – интервал – расстояние между двумя точками x_1, y_1, z_1 и x_2, y_2, z_2 , которое сохраняется в классической механике, $\Delta t = t_2 - t_1$.

5. *Закон сложения скоростей* в релятивистской механике

$$v' = \frac{v - V}{1 - \frac{Vv}{c^2}}. \quad (5.11)$$

5. Релятивистская динамика

В релятивистской динамике масса тел есть функция их скорости:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (5.12)$$

где m_0 – **масса покоя**, измеренная в той ИСО, где тело покоится, m – **релятивистская масса** тела в движущейся системе.

В классической механике импульс определяется как $\vec{p} = m\vec{v} = m \frac{d\vec{r}}{dt}$. Поскольку в специальной теории относительности масса и время зависят от скорости тела, то заменив время dt , определяемое по часам той системы, в которой определяется импульс, на $d\tau_0$, определяемое по часам, движущимся вместе с телом, получим **релятивистский импульс**:

$$\vec{p} = m_0 \frac{d\vec{r}}{d\tau_0} = m_0 \frac{d\vec{r}}{d\tau} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (5.13)$$

где m_0 – масса покоя.

Основным законом классической динамики является II закон Ньютона $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$, который обычно используют в виде $\vec{F} = m\vec{a}$. Но в релятивистском случае следует учитывать зависимость массы и импульса от скорости движения, потому **основное уравнение релятивистской динамики (III закон Ньютона)** принимает вид

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right). \quad (5.14)$$

В силу однородности и изотропности пространства в релятивистской механике справедливы законы сохранения релятивистских импульса и момента импульса (в замкнутой системе).

Полная энергия тела пропорциональна его релятивистской массе:

$$E = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (5.15)$$

Энергия покоя – это энергия, которой тело обладает в состоянии покоя.

$$E_0 = m_0 c^2. \quad (5.16)$$

Эта формула выражает **взаимосвязь массы и энергии**.

Кинетическая энергия – энергия, которой обладает движущееся тело – в релятивистской механике имеет вид

$$E_{\text{кин}} = E - E_0 = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} - 1 \right). \quad (5.17)$$

Используя формулы для энергии и импульса, можно получить **связь между энергией и импульсом** в виде

$$\left. \begin{aligned} \vec{p} &= \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \\ E &= \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\vec{p}}{E} = \frac{m_0 \vec{v} \sqrt{1 - \beta^2}}{m_0 c^2 \sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{\vec{v}}{c^2} \Rightarrow \vec{p} = \frac{E}{c^2} \vec{v},$$

$$E^2 = \frac{m_0^2 c^4}{1 - \beta^2} \Rightarrow E^2 (1 - \beta^2) = E^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) = E^2 - \frac{E^2 v^2}{c^2} = m_0^2 c^4 \Rightarrow$$

$$E^2 - \frac{E^2 v^2}{c^2} \cdot \frac{c^2}{c^2} = m_0^2 c^4 \Rightarrow E^2 - p^2 c^2 = m_0^2 c^4$$

Таким образом, связь между энергией и импульсом выражается следующими соотношениями:

$$\vec{p} = \frac{E}{c^2} \vec{v}, \quad (5.18)$$

$$E = c \sqrt{p^2 + m_0^2 c^2}, \quad (5.19)$$

при этом выражение $\frac{E^2}{c^2} - p^2 = m_0^2 c^2$ является инвариантом, т. е. величиной, не зависящей от времени.

II. ЗАДАЧИ

Задача 5.1

Какую скорость должно иметь движущееся тело, чтобы его продольные размеры уменьшились в 2 раза?

Решение

Собственная длина l_0 , т. е. длина тела в системе, относительно которой оно покоится, и l – длина тела в системе, относительно которой оно движется со скоростью v , близкой к скорости света c , связаны соотношением

$$l = l_0 \sqrt{1 - \beta^2},$$

где $\beta = v/c$.

Полагая, что длина $l = l_0/2$, получаем

$$l_0/2 = l_0 \sqrt{1 - \beta^2}.$$

Отсюда $\beta = \sqrt{3}/2 = 0,866$.

Скорость $v = \beta c = 0,866c = 2,6 \cdot 10^8$ м/с.

Задача 5.2

Элементарная частица мезон, входящая в состав космических лучей, движется со скоростью, составляющей 95 % скорости света. Какой промежуток времени τ по часам неподвижного наблюдателя соответствует 1 секунде собственного времени мезона?

Решение

Инерциальная система отсчета, относительно которой мезон покоится, движется со скоростью $v = 0,95c$ относительно неподвижного наблюдателя. Собственное время мезона τ_0 измеряется при помощи часов, которые движутся вместе с ним. Следовательно, промежуток времени по часам неподвижного наблюдателя с учетом того, что $\beta = 0,95$, составляет

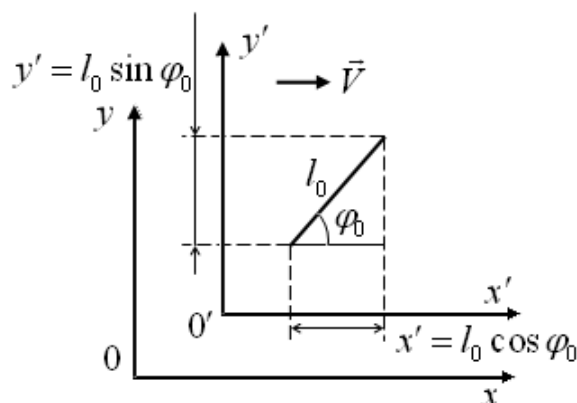
$$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - 0,95^2}} = 3,2 \text{ с.}$$

Задача 5.3

Жесткий стержень длиной $l_0 = 1$ м покоится в системе K' . Стержень расположен так, что составляет угол $\varphi_0 = 45^\circ$ с осью x' . Определить длину и угол φ в системе K , если скорость системы K' относительно системы K составляет $V = 0,8c$.

Решение

При движении со скоростями близкими к скорости света в направлении движения происходит сокращение длины движущегося объекта. Если система K' движется со скоростью $V = 0,8c$ относительно системы K так, что оси x и x' параллельны, то изменяться будет длина проекции $x' = l_0 \cdot \cos \varphi_0$. В системе K ее длина составит



$$x = x' \sqrt{1 - \beta^2} = l_0 \cdot \cos \varphi_0 \sqrt{1 - \beta^2},$$

где $\beta = V/c = 0,8c/c = 0,8$.

Проекция на вертикальную ось при движении не меняется и равна

$$y' = l_0 \sin \varphi_0 = y.$$

Длина стержня в системе K

$$l = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{l_0^2 \cdot \cos^2 \varphi_0 (1 - \beta^2) + l_0^2 \sin^2 \varphi_0} = l_0 \sqrt{1 - \beta^2 \cos^2 \varphi_0}.$$

Подставляя данные задачи, получим

$$l = 1 \cdot \sqrt{1 - (0,8 \cdot 0,707)^2} = 0,825 \text{ м.}$$

Угол φ найдем из выражения

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x} = \frac{l_0 \sin \varphi_0}{l_0 \cdot \cos \varphi_0 \sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{\operatorname{tg} \varphi_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} = 1,67.$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} 1,66 = 59^\circ.$$

Задача 5.4

Собственное время жизни элементарной частицы $\tau_0 = 2$ мкс. От точки рождения до точки распада в лабораторной системе отсчета частица пролетела расстояние $l = 6$ км. С какой скоростью (в долях скорости света) двигалась эта частица?

Решение

Для того чтобы найти скорость частицы в лабораторной системе отсчета необходимо найти время жизни частицы в этой системе. Из формулы, связывающей собственное время жизни τ_0 с временем жизни τ в той системе, относительно которой частица движется

$$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Тогда скорость движения частицы

$$v = \frac{l}{\tau} = \frac{l\sqrt{1 - \beta^2}}{\tau_0} = \frac{l\sqrt{1 - (v/c)^2}}{\tau_0}.$$

Разделим обе части формулы на скорость света в вакууме c и после преобразования получим:

$$\frac{v}{c} = \frac{l\sqrt{1 - (v/c)^2}}{c\tau_0}$$

$$\beta = \frac{v}{c} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\tau_0 c}{l}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{2 \cdot 10^{-6} \cdot 3 \cdot 10^8}{6 \cdot 10^3}\right)^2}} = 0,995.$$

Задача 5.5

При какой скорости β (в долях скорости света) релятивистская масса частицы вещества в 3 раза больше ее массы покоя?

Решение

При движении со скоростью, которая близка к скорости света, масса частицы m связана с ее массой покоя m_0 по формуле $m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$.

Если $m = 3m_0$, то
$$3m_0 = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

откуда

$$\sqrt{1-\beta^2} = 0,333.$$

Скорость частицы (в долях скорости света) составляет $\beta = 0,94$, а в абсолютных значениях $v = \beta c = 2,82 \cdot 10^8$ м/с.

Задача 5.6

Какую ускоряющую разность U потенциалов должен пройти электрон, чтобы его скорость составляла 95 % скорости света?

Решение

Кинетическая энергия электрона возросла за счет работы ускоряющего электрического поля $eU = E_{кин}$. Так как скорость электрона близка к скорости света, то его кинетическая энергия рассчитывается по релятивистской формуле

$$E_{кин} = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \right).$$

Следовательно,

$$U = \frac{m_0 c^2}{e} \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \right) = \frac{9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 9 \cdot 10^{16}}{1,6 \cdot 10^{-19}} \left(\frac{1}{\sqrt{1-0,95^2}} - 1 \right) = 1,13 \cdot 10^6 \text{ В}.$$

Задача 5.7

Найти скорость частицы, если его полная энергия в 10 раз больше энергии покоя.

Решение

Используя выражения для полной энергии $E = mc^2$, энергии покоя $E_0 = m_0c^2$ и соотношение между ними из условия задачи $E = 10E_0$, получаем

$$mc^2 = 10m_0c^2,$$

$$\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = 10m_0c^2.$$

Отсюда $\beta = 0,995$ и $v = \beta c = 0,995c = 2,98 \cdot 10^8$ м/с.

Задача 5.8

Какую долю β скорости света должна составлять скорость частицы, чтобы ее кинетическая энергия была равна ее энергии покоя.

Решение

В соответствии с условием задачи приравняем кинетическую энергию частицы ее энергии покоя $m_0c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \right) = m_0c^2$ и получим $\beta = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0,866$.

Задача 5.9

Какую ускоряющую разность потенциалов должен пройти протон, чтобы его масса была такой же, как у α -частицы с кинетической энергией $E_{\text{кин}} = 10^9$ эВ?

Решение

Выразим кинетическую энергию $E_{\text{кин}}$ α -частицы через ее полную энергию и энергию покоя:

$$E_{\text{кин } \alpha} = m_{\alpha}c^2 - m_{0\alpha}c^2,$$

тогда масса движущейся α -частицы составляет

$$m_{\alpha} = \frac{E_{\text{кин } \alpha} + m_{0\alpha}c^2}{c^2}.$$

Кинетическая энергия протона равна

$$E_{\text{кин } p} = m_p c^2 - m_{0p} c^2,$$

откуда масса движущегося протона

$$m_p = \frac{E_{\text{кин } p} + m_{0p} c^2}{c^2}.$$

По условию задачи массы движения α -частицы и протона равны: $m_{\alpha} = m_p$. Это означает, что

$$\frac{E_{\text{кин } \alpha} + m_{0\alpha} c^2}{c^2} = \frac{E_{\text{кин } p} + m_{0p} c^2}{c^2},$$

$$E_{\text{кин } \alpha} + m_{0\alpha} c^2 = E_{\text{кин } p} + m_{0p} c^2.$$

Учитывая, что $m_{0\alpha} = 4m_{0p}$, а, значит, и $m_{0\alpha} c^2 = 4m_{0p} c^2$, запишем

$$E_{\text{кин } p} + m_{0p} c^2 = E_{\text{кин } \alpha} + 4m_{0p} c^2,$$

откуда кинетическая энергия протона

$$E_{\text{кин } p} = E_{\text{кин } \alpha} + 4m_{0p} c^2 - m_{0p} c^2 = E_{\text{кин } \alpha} + 3m_{0p} c^2.$$

Эту кинетическую энергию протон получает в ускоряющем электрическом поле, работа которого

$$eU = E_{\text{кин } \alpha} + 3m_{0p} c^2.$$

Следовательно, разность потенциалов, которую должен пройти протон:

$$U = \frac{E_{\text{кин } \alpha} + 3m_{0p} c^2}{e} = \frac{10^9 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} + 3 \cdot 1,66 \cdot 10^{-27} \cdot 9 \cdot 10^{16}}{1,6 \cdot 10^{-19}} = 3,8 \cdot 10^9 \text{ В.}$$

Задача 5.10

Кинетическая энергия релятивистской частицы равна ее энергии покоя. Во сколько раз возрастет импульс частицы, если ее кинетическая энергия увеличится в 4 раза?

Решение

Рассмотрим два способа решения этой задачи.

1 способ

Установим связь между импульсом и кинетической энергией частицы. Для этого воспользуемся выражениями для полной энергии в релятивистской механике:

$$\begin{cases} E = E_{\text{кин}} + E_0, \\ E^2 = p^2 c^2 + E_0^2. \end{cases}$$

Возведем первое уравнение в квадрат и приравняем правые части уравнений. В итоге получим $p = \frac{1}{c} \sqrt{E_{\text{кин}}^2 + 2E_{\text{кин}}E_0}$.

По условию задачи $E_{\text{кин}1} = E_0$, $E_{\text{кин}2} = 4E_0$, следовательно, начальный p_1 и конечный p_2 импульсы релятивистской частицы равны

$$p_1 = \frac{1}{c} \sqrt{E_{\text{кин}}^2 + 2E_0E_0} = \frac{E_0\sqrt{3}}{c}, \quad p_2 = \frac{1}{c} \sqrt{16E_0^2 + 8E_0E_0} = \frac{E_0\sqrt{24}}{c}.$$

С учетом этого, отношение импульсов равно

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{E_0\sqrt{24}}{c} \frac{c}{E_0\sqrt{3}} = \sqrt{8} = 2,82.$$

2 способ

Найдем скорости частицы (в долях скорости света) для двух случаев:

1) когда ее кинетическая энергия равна энергии покоя:

$$E_{\text{кин}1} = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta_1^2}} - 1 \right) = m_0 c^2, \Rightarrow \beta_1 = 0,866.$$

2) и когда ее кинетическая энергия увеличилась в 4 раза, т. е. стала в 4 раза больше ее энергии покоя:

$$E_{кин2} = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \beta_2^2}} - 1 \right) = 4m_0 c^2, \Rightarrow \beta_2 = 0,98.$$

Учитывая то, что релятивистский импульс равен $p = \frac{m_0 \beta c}{\sqrt{1 - \beta^2}}$, найдем

отношение импульсов

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{m_0 \beta_2 c \sqrt{1 - \beta_1^2}}{m_0 \beta_1 c \sqrt{1 - \beta_2^2}} = \frac{0,98 \sqrt{1 - 0,866^2}}{0,866 \sqrt{1 - 0,98^2}} = 2,82.$$

Задача 5.11

Частица имела импульс $p_1 = m_0 c$. После действия на нее силы импульс увеличился вдвое. Определить, как изменятся при этом: 1) полная энергия частицы; 2) кинетическая энергия частицы.

Решение

1) Полная энергия частицы связана с импульсом $E = c \sqrt{p^2 + m_0^2 c^2}$.

Полные энергии в первом ($p_1 = m_0 c$) и втором ($p_2 = 2p_1 = 2m_0 c$) случаях равны, соответственно:

$$E_1 = c \sqrt{p_1^2 + m_0^2 c^2} = c \sqrt{m_0^2 c^2 + m_0^2 c^2} = m_0 c^2 \sqrt{2},$$

$$E_2 = c \sqrt{p_2^2 + m_0^2 c^2} = c \sqrt{4m_0^2 c^2 + m_0^2 c^2} = m_0 c^2 \sqrt{5}.$$

Отсюда изменение полной энергии составляет

$$\frac{E_2}{E_1} = \sqrt{\frac{5}{2}} = 1,58.$$

2) Кинетическая энергия есть разность между полной энергией E и энергией покоя E_0 :

$$E_{кин} = E - E_0.$$

Кинетические энергии частицы до и после действия силы равны

$$E_{кин1} = E_1 - E_0 = m_0 c^2 (\sqrt{2} - 1),$$

$$E_{кин2} = E_1 - E_0 = m_0 c^2 (\sqrt{5} - 1).$$

Изменение кинетической энергии составляет

$$\frac{E_{кин2}}{E_{кин1}} = \frac{\sqrt{5} - 1}{\sqrt{2} - 1} = 2,98.$$

III. КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

К5.1. Собственное время жизни некоторой нестабильной частицы 10 нс, время жизни частицы в неподвижной системе 20 нс. Найти путь, пройденный этой частицей до распада в неподвижной системе отсчета.

$$\left[s = c\tau \sqrt{1 - \left(\frac{\tau_0}{\tau} \right)^2} = 5,2 \text{ м} \right]$$

К5.2. Найти скорость, с которой должен двигаться куб вдоль одного из своих ребер, чтобы его плотность увеличилась вдвое? $\left[v = 2,12 \cdot 10^8 \text{ м/с} \right]$

К5.3. На сколько увеличится масса α -частицы, ускоренной из состояния покоя до скорости, равной $0,9c$? $\left[\Delta m = 8,64 \cdot 10^{-27} \text{ кг} \right]$

К5.4. Масса движущегося тела увеличилась на 20 %. Во сколько раз изменилась его длина? $\left[\text{уменьшилась в } 1,2 \text{ раза} \right]$

К5.6. Какую разность потенциалов должен пройти протон, чтобы его размеры уменьшились в 2 раза? $\left[U = \frac{m_{op} c^2}{e} = 9,315 \cdot 10^8 \text{ В} \right]$

К5.7. Во сколько раз увеличится масса движущегося электрона в сравнении с его массой покоя, если электрон, пройдя ускоряющую разность потенциалов, приобрел кинетическую энергию 0,76 МэВ? $\left[m/m_0 = 2,5 \right]$

К5.8. При какой скорости кинетическая энергия частицы равна ее энергии покоя? $\left[v = 0,866c = 2,6 \cdot 10^8 \text{ м/с} \right]$

Г л а в а 6 .

КВАНТОВАЯ ОПТИКА. ТЕПЛОВОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ

I. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

1. Тепловое излучение и его основные характеристики

Тепловое излучение – электромагнитное излучение, возникающее за счет внутренней энергии излучающего тела и зависящее только от температуры и оптических свойств этого тела.

Тепловое излучение имеет место при любой температуре: раскаленные тела (твердые и жидкие) светятся белым светом; с понижением температуры уменьшается интенсивность излучения и изменяется его спектральный состав (цвет).

Тепловое излучение является единственным излучением, способным находиться в термодинамическом равновесии с веществом, поэтому его называют *равновесным*.

Интенсивность теплового излучения характеризуется потоком энергии, испускаемой единицей поверхности излучающего тела по всем направлениям – *энергетической светимостью (излучательностью) R* .

Энергетическая светимость R – функция температуры и частоты, что отражено индексами в обозначении $R_{\omega T}$.

Если единица поверхности испускает поток энергии $dR_{\omega T}$ в интервале частот $d\omega$, то

$$dR_{\omega T} = r_{\omega T} d\omega,$$

где $r_{\omega T}$ – испускательная способность. Так как излучение состоит из волн различных частот ω , то

$$R_{\omega T} = \int dR_{\omega T} = \int_0^{\infty} r_{\omega T} d\omega.$$

$$[R] = \frac{\text{Дж}}{\text{с} \cdot \text{м}^2} = \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}.$$

Испускательная способность (спектральная плотность энергетической светимости) сильно зависит от температуры и характеризует мощность излучения с единицы площади поверхности тела в интервале частот единичной ширины.

$$[r_{\omega T}] = \frac{\text{Дж}}{\text{м}^2}.$$

Поглощательная способность – безразмерная величина, показывающая какая доля падающего потока лучистой энергии $(d\Phi_{\omega})_{\text{пад}}$, обусловленного электромагнитными волнами, частота которых заключена в интервале $d\omega$, поглощается телом:

$$a_{\omega T} = \frac{(d\Phi_{\omega})_{\text{пол}}}{(d\Phi_{\omega})_{\text{пад}}},$$

где $a_{\omega T}$ – функция частоты и температуры.

Абсолютно черное тело характеризуется поглощательной способностью $a_{\omega T} \equiv 1$ для всех частот и при любой температуре. Тела с $a_{\omega T} < 1$ называются **серыми**.

Понятие «абсолютно черное тело» является модельным, в природе таких тел не существует. Есть некоторые объекты, при описании которых можно полагать $a_{\omega T} = 1$. К их числу относят, например, сажу и платиновую чернь, которые поглощают около 99 % падающего на них излучения. Наиболее черным из всех известных веществ является субстанция Vantablack, состоящая из параллельно ориентированных нанотрубок, поглощающих 99,995 % падающего потока излучения в диапазонах видимого света, микро- и радиоволн. Также характеристиками, близкими к абсолютно черному телу обладает Солнце.

Термин «абсолютно черное тело» был введен в 1962 г. великим немецким физиком Густавом Кирхгофом (1824–1887) (рис. 6.1, а).

2. Закон Кирхгофа

В физике при описании теплового излучения используется модель абсолютно черного тела в виде полости с отверстием, внутри которой создан вакуум (рис. 6.2). Представим, что внутри полости, где поддерживается

постоянная температура T , находятся тела, которые могут обмениваться энергией только в виде ЭМ волн. Со временем все тела примут температуру T , при которой тела, обладающие большей испускательной способностью $r_{\omega T}$, будут и больше поглощать. Излучение из отверстия полости можно с большой степенью точности считать излучением абсолютно черного тела, имеющего температуру T .



Рисунок 6.1 – Густав Кирхгоф (а), Йозеф Стефан (б), Людвиг Больцман (в)

Г. Кирхгоф в 1856 г. сформулировал закон, названный в его честь **законом Кирхгофа**: отношение испускательной и поглощательной способностей не зависит от природы тела, оно является для всех тел одной и той же функцией частоты и температуры и называется испускательной способностью абсолютно черного тела $r_{\omega T}^*$.



Рисунок 6.2 – Модель абсолютно черного тела

$$\left(\frac{r_{\omega T}}{a_{\omega T}} \right)_1 = \left(\frac{r_{\omega T}}{a_{\omega T}} \right)_2 = \dots = \left(\frac{r_{\omega T}}{a_{\omega T}} \right)_{\text{черн}} = r_{\omega T}^* = f(\omega, T).$$

3. Закон Стефана-Больцмана

Если излучение абсолютно черного тела, которое испускается, например, описанной выше полостью, разложить в спектр помощью дифракционной решетки, то, измеряя интенсивность различных участков спектра,

можно экспериментально найти спектральную плотность энергетической светимости $r_{\omega T}^* = f(\omega, T)$.

В 1879 г. австрийский физик Йозеф Стефан (1835–1893) (рис. 6.1, б), анализируя экспериментальные данные, пришел к выводу, что энергетическая светимость любого тела пропорциональна T^4 . Позднее в том же году австрийский физик-теоретик Людвиг Больцман (1844–1906) (рис. 6.1, в), на основе термодинамики показал, что такая зависимость справедлива только для абсолютно черного тела. Эти выводы были сформулированы в виде закона.

Закон Стефана-Больцмана: энергетическая светимость абсолютно черного тела пропорциональна четвертой степени его температуры:

$$R^* = \sigma T^4,$$

где $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Вт} \cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{К}^{-4}$ – постоянная Стефана-Больцмана.

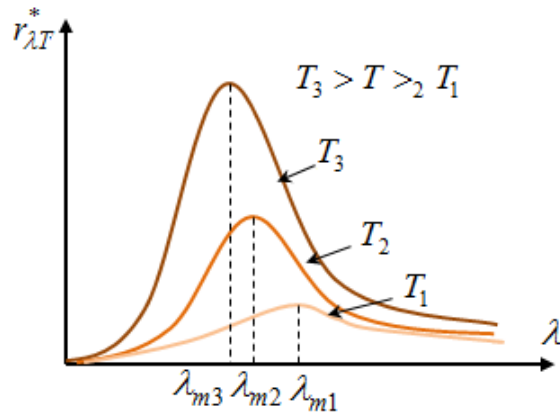


Рисунок 6.3 – Зависимость спектральной плотности энергетической светимости от длины волны

Закон Стефана-Больцмана, определяя зависимость энергетической светимости от температуры, не даёт ответа относительно спектрального состава излучения абсолютно черного тела. Из экспериментальных кривых зависимости $r_{\lambda T}^*(\lambda)$ при различных температурах (рис. 6.3) следует, что распределение энергии в спектре абсолютно черного тела является неравномерным. Все кривые имеют максимум, который с увеличением T смещается в сторону коротких длин волн. Площадь, ограниченная кривой зависимости $r_{\lambda T}^*(\lambda)$, равна R^* (это следует из геометрического смысла интеграла) и пропорциональна T^4 .

4. Закон Вина

Пытаясь теоретически получить вид функции $f(\omega, T)$, немецкий физик, лауреат Нобелевской премии 1911 г. Вильгельм Вин (1864–1928) (рис. 6.4, а) в 1893 году сформулировал закон, который был назван **закон смещения Вина**:

$$\lambda_m = \frac{b}{T},$$

где $b = 2,898 \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot \text{К}$ – постоянная Вина, λ_m – длина волна, соответствующая максимальному значению испускательной способности абсолютно черного тела (длина волна, соответствующая максимуму спектральной плотности энергетической светимости).

Из формулы видно, что при повышении температуры абсолютно черного тела максимум энергии смещается в область меньших длин волн.



Рисунок 6.4 – Вильгельм Вин (а), Джон Стретт, лорд Рэлей (б), Джеймс Джинс (в), Макс Планк (г)

5. Формула Рэля-Джинса

Дальнейшее изучение вида функции Кирхгофа $r_{\lambda T}^*(\lambda)$ (или $r_{\omega T}^*(\omega)$) методами классической физики предприняли английские физики Джон Уильям Стретт, лорд Рэлей (1842–1919) и Джеймс Хопвуд Джинс (1877–1946) (рис. 6.4, б, в). Результаты их исследования привели к формуле

$$f(\omega, T) = \frac{\omega^2}{4\pi^2 c^2} kT,$$

где c – скорость света, а k – постоянная Больцмана (рис. 6.5).

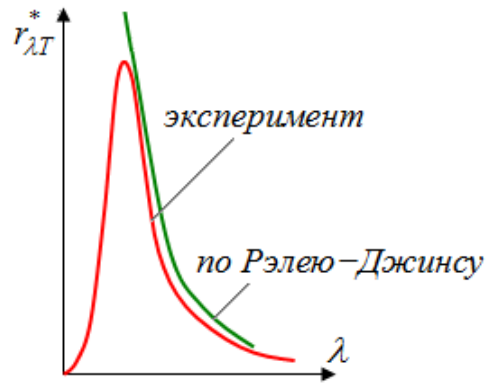


Рисунок 6.5 – Зависимости спектральной плотности энергетической светимости: экспериментальная и по расчетам Рэлея-Джинса

Эта формула хорошо согласовывалась с данными опытов только в области малых частот излучения. С увеличением частоты расхождение между экспериментальными и теоретическими значениями увеличивалось. Кроме того, формула Рэлея-Джинса противоречила законам Вина и Стефана-Больцмана, а также закону сохранения энергии (интегрирование формулы Рэлея-Джинса дает $R^* = \infty$, в то время как эта величина имеет конечное значение). В историю физики этот факт несоответствия теории и практики вошел под названием «**ультрафиолетовая катастрофа**» (слово «катастрофа» в переводе с греческого означает: 1) переворот, гибель, разрушение; 2) стремительное нарастание).

Работы Рэлея-Джинса показали невозможность применения классической физики к исследованию спектрального состава излучения абсолютно черного тела.

6. Формула Планка. Квантовая гипотеза

Для объяснения закономерностей теплового излучения немецкий физик, Нобелевский лауреат 1918 г. Макс Планк (1858–1947) в 1900 г. выдвинул **квантовую гипотезу**, согласно которой электромагнитное излучение испускается в виде отдельных порций энергии (**квантов**) (рис. 6.4, з) Энергия кванта пропорциональна частоте соответствующего электромагнитного излучения:

$$\varepsilon = \hbar \omega = h\nu = \frac{hc}{\lambda},$$

где $\hbar = 1,055 \cdot 10^{-34}$ Дж·с, $h = 2\pi\hbar = 6,62 \cdot 10^{-34}$ Дж·с – постоянные Планка.

Формула Планка для спектральной плотности энергетической светимости абсолютно черного тела:

$$r_{\omega T}^* = f(\omega, T) = \frac{\hbar \omega^3}{4\pi^2 c^2} \cdot \frac{1}{e^{\frac{\hbar \omega}{kT}} - 1}.$$

С учетом того, что $\lambda = cT = \frac{c}{\nu} = \frac{2\pi c}{\omega}$, спектральную плотность энергетической светимости (испускательную способность) по формуле Планка можно записать в виде

$$r_{\lambda T}^* = f(\lambda, T) = \frac{2\pi \hbar c^2}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{e^{\frac{\hbar c}{\lambda kT}} - 1}.$$

Максимальное значение спектральной плотности энергетической светимости (испускательной способности)

$$(r_{\lambda T}^*)_{\max} = CT^5,$$

где $C = 1,3 \cdot 10^{-5} \text{ Вт} \cdot \text{м}^{-3} \cdot \text{К}^{-5}$.

Формула Планка точно согласуется с экспериментальными данными. Из нее получаются законы Стефана-Больцмана и Вина.

7. Практические приложения

а) **Оптическая пирометрия** (от греч. *pyr* – огонь и *metreo* – измеряю) совокупность оптических (бесконтактных) методов измерения температуры. Соответствующие приборы называются **пирометрами**.

Типы пирометров:

1. **радиационные** – в них регистрируется суммарное тепловое излучение исследуемого нагретого тела во всем интервале частот;

2. **оптические** – регистрируют излучение в каком-либо одном или нескольких узких участках спектра. Бывают яркостные (например, с исчезающей нитью) и цветовые.

Принцип действия оптического пирометра с исчезающей нитью основан на сравнении монохроматической яркости излучения накаливаемого тела с монохроматической яркостью излучения нити специальной пирометрической лампы накаливания. Если яркости нити и накаливаемого тела неоди-

наковы, нить будет видна более темной или более светлой, чем фон. Регулируя накал нити, добиваются равенства яркостей, когда изображение нити сольется с фоном и станет неразличимо (нить «исчезнет»). В этот момент яркостная температура нити равна яркостной температуре объекта измерения.

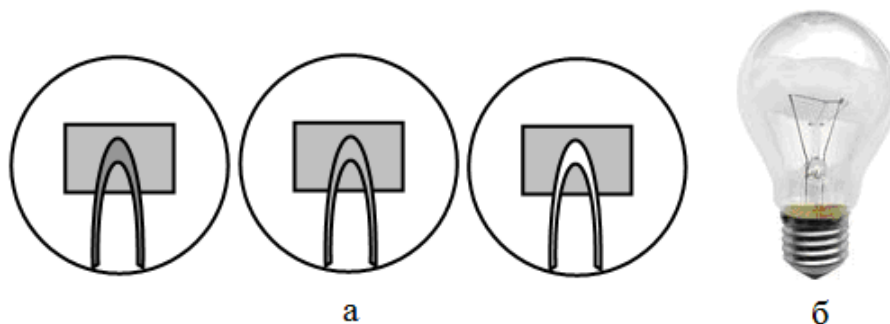


Рисунок 6.6 – поле зрения в пирометре с "исчезающей нитью" (а), лампа накаливания (б)

б) Лампы накаливания

Свечение раскаленных тел используется для создания источников света. Первые лампы накаливания созданы русским электротехником А. Н. Лодыгиным (1847–1923) в 1874 г., а усовершенствованы американским изобретателем Т. Эдисоном (1847–1931) в 1879 г. Дуговая лампа была изобретена русским инженером П. Н. Яблочковым (1847–1894) в 1876 г.

Важная характеристика ламп накаливания – светоотдача. Для ее повышения предпринимается следующее:

1. нить накаливания изготавливается из вольфрама, который является тугоплавким металлом и обладает высокой селективностью своего теплового излучения: доля энергии, приходящаяся на излучение в видимой части спектра, больше, чем у абсолютно черного тела;
2. увеличение температуры накала. При этом, чтобы не происходило распыление вещества нити, стеклянные баллоны заполняют инертным газом;
3. для уменьшения теплообмена нить накаливания сворачивают в спираль, при этом образуется почти неподвижный слой газа внутри и около спирали.

Коэффициент полезного действия современной лампы накаливания $\sim 5\%$.

II. ЗАДАЧИ

Задача 6.1

Температура поверхности Солнца $T = 5800 \text{ К}$. Считая излучение Солнца близким к излучению абсолютно черного тела, определить какую мощность излучения имеет Солнце, а также найти массу электромагнитных волн (всех длин), излучаемых Солнцем за 1 с.

Решение

Поскольку излучение Солнца близко к излучению абсолютно черного тела, то его энергетическая светимость по закону Стефана-Больцмана равна $R^* = \sigma T^4$. Мощность излучения (или иначе поток энергии, излучаемой Солнцем) равна произведению энергетической светимости на площадь поверхности Солнца:

$$N = R^* \cdot S = \sigma T^4 \cdot 4\pi r_c^2,$$

где $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}^4}$ – постоянная Стефана-Больцмана, $r_c = 6,95 \cdot 10^8 \text{ м}$ – радиус Солнца.

Подставляя численные значения, определим мощность излучения Солнца

$$N = \sigma T^4 \cdot 4\pi r_c^2 = 5,67 \cdot 10^{-8} \cdot 5800^4 \cdot 4\pi \cdot (6,95 \cdot 10^8)^2 = 3,9 \cdot 10^{26} \text{ Вт}.$$

Энергия электромагнитных волн, излучаемых за промежуток времени Δt , равна произведению мощности излучения N на время Δt :

$$E_0 = N\Delta t.$$

Массу электромагнитных волн (всех длин), которую излучает Солнце за 1 секунду, найдем с помощью релятивистского закона, задающего взаимосвязь массы и энергии $E_0 = m_0 c^2$:

$$m_0 = \frac{E_0}{c^2} = \frac{N\Delta t}{c^2} = \frac{3,9 \cdot 10^{26} \cdot 1}{(3 \cdot 10^8)^2} = 4,33 \cdot 10^9 \text{ кг}.$$

Задача 6.2

Мощность излучения абсолютно черного тела $N = 10 \text{ кВт}$. Найти площадь излучающей поверхности, если максимум спектральной плотности его энергетической светимости приходится на длину волны $\lambda_m = 700 \text{ нм}$.

Решение

Мощность излучения (поток энергии, излучаемой абсолютно черным телом) с поверхности площадью S

$$N = R^* \cdot S.$$

Принимая во внимание, что по закону Кирхгофа энергетическая светимость абсолютно черного тела равна $R^* = \sigma T^4$, мощность излучения

$$N = R^* \cdot S = \sigma T^4 S.$$

Выразив температуру из закона смещения Вина $\lambda_m = \frac{b}{T}$, определим площадь излучающей поверхности:

$$S = \frac{N}{\sigma T^4} = \frac{N}{\sigma} \cdot \left(\frac{\lambda_m}{b} \right)^4 = \frac{10^4}{5,67 \cdot 10^{-8}} \cdot \left(\frac{0,7 \cdot 10^{-6}}{2,9 \cdot 10^{-3}} \right)^4 = 6 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

Задача 6.3

Абсолютно черное тело имеет температуру $T_1 = 2900 \text{ К}$. В результате остывания тела длина волны, на которую приходится максимум спектральной плотности энергетической светимости, изменилась на $\Delta\lambda_m = 9 \text{ мкм}$. До какой температуры охладилось тело?

Решение

Длина волны, на которую приходится максимум спектральной плотности энергетической светимости, определяется законом смещения Вина $\lambda_m = \frac{b}{T}$, поэтому изменение этой длины волны при изменении температуры от T_1 до T_2 равно

$$\Delta\lambda_m = \lambda_{m2} - \lambda_{m1} = \frac{b}{T_2} - \frac{b}{T_1},$$

где $b = 2,898 \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot \text{К}$ – постоянная Вина.

Отсюда искомая температура составляет

$$T_2 = \frac{bT_1}{b + \Delta\lambda_m \cdot T_1} = \frac{2,97 \cdot 10^{-3} \cdot 2900}{2,97 \cdot 10^{-3} + 9 \cdot 10^{-6} \cdot 2900} = 296 \text{ К}.$$

Задача 6.4

Температура абсолютно черного тела изменилась при нагревании от 1000 до 3000 К. Во сколько раз увеличилась при этом его энергетическая светимость R^ ? На сколько изменилась длина волны, на которую приходится максимум спектральной плотности энергетической светимости λ_m ? Во сколько раз увеличилась его максимальная спектральная плотность энергетической светимости r_λ ?*

Решение

Отношение энергетических светимостей, соответствующих температурам T_1 и T_2 , найдем, используя закон Стефана-Больцмана:

$$\frac{R_2^*}{R_1^*} = \frac{\sigma T_2^4}{\sigma T_1^4} = \left(\frac{3000}{1000} \right)^4 = 81.$$

Изменение длины волны, на которую приходится максимум спектральной плотности энергетической светимости, определим с помощью закона Вина:

$$\lambda_{m1} - \lambda_{m2} = \frac{b}{T_1} - \frac{b}{T_2} = b \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right) = 2,97 \cdot 10^{-3} \left(\frac{1}{1000} - \frac{1}{3000} \right) = 1,97 \cdot 10^{-6} \text{ м}.$$

Изменение максимального значения спектральной плотности энергетической светимости

$$\frac{(r_\lambda)_{\max 2}}{(r_\lambda)_{\max 1}} = \frac{CT_2^5}{CT_1^5} = \left(\frac{3000}{1000} \right)^5 = 243.$$

Задача 6.5

Какую мощность ΔN надо подводить к зачерненному металлическому шарiku радиусом $r = 2$ см, чтобы поддерживать его температуру на $\Delta T = 27$ K выше температуры окружающей среды? Температура окружающей среды $T = 293$ K. Считать, что шарик излучает как абсолютно черное тело, а тепло теряется только вследствие излучения.

Решение

Мощность, излучаемая шариком при температуре окружающей среды T , определяется выражением

$$N = R^* \cdot S = \sigma T^4 S,$$

а при температуре $T_1 = T + \Delta T$

$$N_1 = R_1^* \cdot S = \sigma T_1^4 S = \sigma (T + \Delta T)^4 \cdot S.$$

Разница этих мощностей компенсируется за счет подвода тепла извне:

$$\begin{aligned} \Delta N = N_1 - N &= S(R_1^* - R) = 4\pi r^2 \sigma (T_1^4 - T^4) = \\ &= 4\pi \cdot 4 \cdot 10^{-4} \cdot 5,67 \cdot 10^{-8} (320^4 - 293^4) = 0,89 \text{ Вт}. \end{aligned}$$

Задача 6.6

Поверхность тела нагрета до температуры $T = 1000$ K. Затем одна половина этой поверхности нагревается на $\Delta T = 100$ K, а другая охлаждается на $\Delta T = 100$ K. Во сколько раз изменится энергетическая светимость поверхности данного тела?

Решение

В исходном состоянии при температуре T энергетическая светимость тела равна $R^* = \sigma T^4$, а излучаемая мощность $N = R^* \cdot S = \sigma T^4 S$, где S – площадь поверхности тела

В состоянии, когда одна половина $S/2$ этой поверхности нагревается на ΔT , а другая половина $S/2$ охлаждается на ΔT , излучаемая мощность, как сумма мощностей, излучаемых каждой половиной, равна

$$N' = N_1 + N_2 = R_1 \cdot \frac{S}{2} + R_2 \cdot \frac{S}{2} = \frac{S\sigma T_1^4}{2} + \frac{S\sigma T_2^4}{2} = \frac{S\sigma}{2} (T_1^4 + T_2^4).$$

Отношение энергетических светимостей определяется отношением излучаемых мощностей

$$\frac{R^*}{R'^*} = \frac{N}{N'} = \frac{S \cdot \sigma \cdot T^4 \cdot 2}{S \cdot \sigma (T_1^4 + T_2^4)} = \frac{2 \cdot (1000)^4}{(1100)^4 + (900)^4} = \frac{2 \cdot 10^{12}}{1,46 \cdot 10^{12} + 0,656 \cdot 10^{12}} = 0,946.$$

Задача 6.7

Через нагревательный элемент электрической печи протекает ток $I = 4,55 \text{ A}$ под напряжением $U = 220 \text{ В}$. 20 % потребляемой мощности рассеивается стенками, а остальная часть идет на тепловое излучение из отверстия диаметром $d = 10 \text{ см}$. Определить предельную температуру T_1 нагрева рабочей зоны, полагая, что она является серым телом с коэффициентом черноты $k = 0,8$. Температуру окружающей среды принять равной $T_0 = 295 \text{ К}$.

Решение

Потребляемая печью мощность может быть найдена по формуле

$$N_{\text{номп}} = I \cdot U = 4,55 \cdot 220 = 1000 \text{ Вт}.$$

Если 20 % потребляемой мощности рассеивается стенками, то 80 % мощности идет на излучения, а значит, коэффициент полезного действия $\eta = 0,8$.

На излучение расходуется мощность

$$N = \eta \cdot N_{\text{номп}} = 0,8 \cdot 1000 = 800 \text{ Вт}.$$

При комнатной температуре T_0 мощность излучения печи составляет

$$N_0 = R_0 \cdot S = k \cdot R_0^* \cdot S = k \cdot \sigma T_0^4 \cdot \frac{\pi d^2}{4},$$

а при температуре T мощность излучения печи будет

$$N_1 = R_1 \cdot S = k \cdot R_1^* \cdot S = k \cdot \sigma T_1^4 \cdot \frac{\pi d^2}{4}.$$

Различие в мощностях излучения компенсируется за счет мощности $N = N_1 - N_0$,

$$\eta \cdot N_{\text{номр}} = k \cdot \sigma T_1^4 \cdot \frac{\pi d^2}{4} - k \cdot \sigma T_0^4 \cdot \frac{\pi d^2}{4} = k \cdot \sigma \cdot \frac{\pi d^2}{4} (T_1^4 - T_0^4).$$

Откуда искомая температура

$$T_1 = \sqrt[4]{\frac{4\eta N}{k\sigma\pi d^2} + T_0^4} = \sqrt[4]{\frac{4 \cdot 0,8 \cdot 10^3}{0,8 \cdot 5,67 \cdot 10^{-8} \cdot \pi \cdot 10^{-2}} + 295^4} = 1225 \text{ К.}$$

Задача 6.8

Излучение Солнца по своему спектральному составу близко к излучению абсолютно черного тела, для которого максимум спектральной плотности энергетической светимости приходится на длину волны 0,48 мкм. Найти массу, теряемую Солнцем каждую секунду за счет этого излучения, оценить время, за которое масса Солнца уменьшится на 1 %.

Решение

Температура поверхности Солнца, определяемая с помощью закона смещения Вина, составляет

$$T = \frac{b}{\lambda_m},$$

где $b = 2,898 \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot \text{К}$ – постоянная Вина.

Энергия, которую Солнце теряет в виде излучения в единицу времени, т. е. мощность излучения, равна произведению энергетической светимости Солнца на площадь излучающей поверхности. Поэтому с учетом закона Стефана-Больцмана $R^* = \sigma T^4$, получаем

$$N = R^* S = R^* \cdot 4\pi r_C^2 = \sigma T^4 \cdot 4\pi r_C^2 = \sigma \left(\frac{b}{\lambda_m} \right)^4 \cdot 4\pi r_C^2,$$

где $r_C = 6,95 \cdot 10^8 \text{ м}$ – радиус Солнца, $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}^4}$ – постоянная Стефана-Больцмана.

Согласно специальной теории относительности Эйнштейна энергия покоя тела (в данной задаче Солнца) E_0 связана с его массой соотношением

$$E_0 = m_0 c^2,$$

где $c = 3 \cdot 10^8$ м/с – скорость света.

Тогда изменение массы Солнца равно

$$\Delta m_0 = \frac{\Delta E_0}{c^2}.$$

Скорость уменьшения массы Солнца за счет излучения определяется как

$$\begin{aligned} \frac{\Delta m_0}{\Delta t} &= \frac{\Delta E_0}{c^2 \Delta t} = \frac{N}{c^2} = \frac{4\pi\sigma b^4 r_C^2}{\lambda_m^4 c^2} = \\ &= \frac{4\pi \cdot 5,67 \cdot 10^{-8} \cdot (2,898 \cdot 10^{-3})^4 (6,95 \cdot 10^8)^2}{(0,48 \cdot 10^{-6})^4 \cdot (3 \cdot 10^8)^2} = 5 \cdot 10^9 \text{ кг/с}. \end{aligned}$$

Время τ , в течение которого происходит относительное уменьшение массы Солнца, равное $0,01m_C$, найдем из

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{0,01m_C}{\tau},$$

где $m_C = 1,99 \cdot 10^{30}$ кг – масса Солнца.

$$\tau = \frac{0,01m_C}{(\Delta m/\Delta t)} = \frac{0,01 \cdot 1,99 \cdot 10^{30}}{5 \cdot 10^9} = 3,98 \cdot 10^{18} \text{ с} = 1,26 \cdot 10^{11} \text{ лет}.$$

III. КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

К6.1. Определить энергетическую светимость абсолютно черного тела R^* , если длина волны, на которую приходится максимум спектральной плотности энергетической светимости, равна $\lambda_m = 0,58$ мкм.

$$\left[R^* = \sigma \left(\frac{b}{\lambda_m} \right)^4 = 3,54 \cdot 10^7 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2} \right]$$

К6.2. Из смотрового окошка печи каждую минуту излучается энергия 6 кДж. Определить температуру стенок печи, если площадь окошка составляет 10 см^2 , а излучение можно считать излучением абсолютно черного

тела. $\left[T = \sqrt[4]{\frac{E}{\sigma S t}} = 1152 \text{ К} \right]$

К6.3. Найти, во сколько раз изменится энергетическая светимость абсолютно черного тела, если длина волны, соответствующая максимуму спектральной плотности энергетической светимости сместилась с $\lambda_{\kappa} = 0,78$ мкм на $\lambda_{\phi} = 0,39$ мкм. $\left[R_2^*/R_1^* = (\lambda_1/\lambda_2)^4 = 16 \right]$

К6.4. Какая часть потребляемой мощности $N = 1$ кВт рассеивается стенками муфельной печи, если она имеет отверстие площадью $S = 100 \text{ см}^2$, и излучает как абсолютно черное тело. Температура внутри печи равна $T = 1000 \text{ К}$. $\left[\eta = 1 - \frac{\sigma S T^4}{N} = 0,43 \right]$

К6.5. Найти температуру абсолютно черного тела, если его начальная температура $T = 2898 \text{ К}$, а при изменении температуры длина волны, соответствующая максимуму спектральной плотности энергетической светимости возросла на $\Delta\lambda_m = 1$ мкм. $\left[T_2 = T_1 / (\Delta\lambda_m T_1 / b) = 1449 \text{ К} \right]$

К6.6. Найти площадь спирали лампы мощностью 25 Вт, если ее температура $T = 2450 \text{ К}$. Считать спираль серым телом с коэффициентом черноты $k = 0,3$. $\left[S = N / k \sigma T^4 = 0,41 \text{ мм}^2 \right]$

КВАНТОВАЯ ОПТИКА. ФОТОНЫ

I. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

1. Фотоэлектрический эффект. Опыт Столетова

Немецкий физик Генрих Герц (1857–1894) в 1887 г. (рис. 7.1, а), изучая генерацию электромагнитных волн при возбуждении электрических колебаний в открытом колебательном контуре с разрядником, обнаружил, что длина искры увеличивается, если катод освещать ультрафиолетовым излучением.

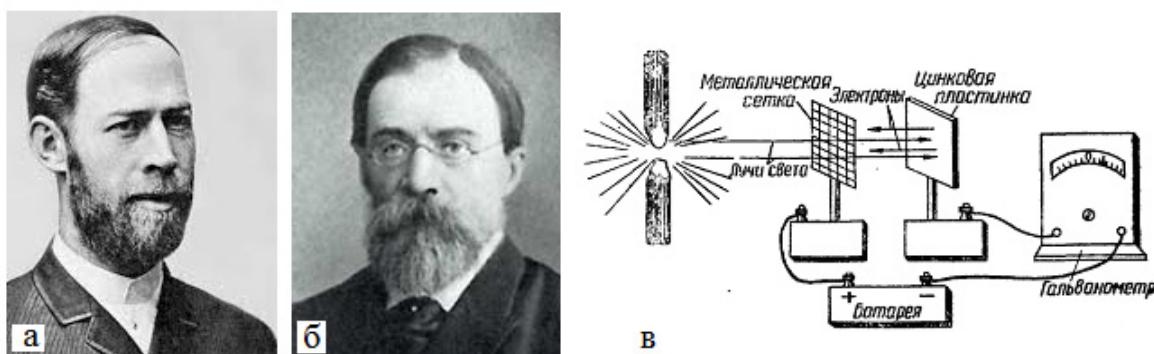


Рисунок 7.1 – Генрих Герц (а), А.Г.Столетов (б), опыт Столетова (в)

В 1888–1889 гг. А. Г. Столетов (1839–1896) (рис. 7.1, б) подверг детальному изучению явление испускания электронов твердыми и жидкими телами под действием электромагнитного излучения, т. е. **фотозмиссию электронов** или **внешний фотоэффект** (рис. 7.1, в).

Опыт Столетова (рис. 7.2, а): конденсатор, состоящий из проволочной сетки и пластины, освещался светом. В цепи возникал ток, регистрируемый гальванометром, – **фототок**. Было обнаружено, что сила фототока пропорциональна освещенности пластины, т. е. экспериментально подтверждено, что под действием света металл теряет отрицательно заряженные частицы. Измерения отношения q/m (удельного заряда) показали, что вылетающие частицы – электроны.

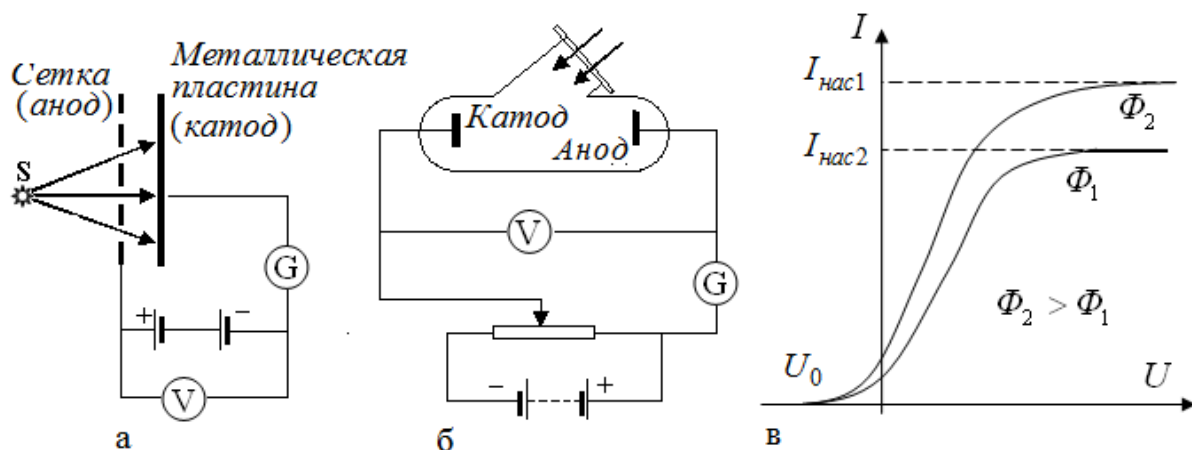


Рисунок 7.2 – Установки для исследования фотоэффекта: опыт Столетова (а), схема с вакуумной трубкой (б); вольт-амперная характеристика (в)

2. Закономерности фотоэффекта

Последующие исследования позволили подробно изучить особенности фотоэффекта. Для этого была использована схема, показанная на рис. 7.2, б. В вакуумной трубке катод, покрытый исследуемым металлом, освещается монохроматическим светом, проходящим через окошко. С помощью реостата меняется величина и знак напряжения U на вакуумной трубке. Опыты показали, что:

1. Фототок насыщения $I_{\text{нас}}$ (рис. 7.2, в) пропорционален падающему световому потоку $\Phi_{\text{св}}$ (**закон Столетова**):

$$I_{\text{нас}} = \gamma \cdot \Phi_{\text{св}}, \quad (7.1)$$

где γ – чувствительность облучаемой поверхности, которая зависит от природы и состояния поверхности, а также от длины световой волны.

2. Максимальная начальная скорость фотоэлектронов и их кинетическая энергия определяются частотой световой волны и не зависят от его интенсивности.

3. Для каждого вещества существует наименьшая частота $\omega_{\text{гр}}$, ниже которой фотоэффект не происходит. Она называется красной границей фотоэффекта. Величина $\omega_{\text{гр}}$ зависит от химической природы вещества и состояния его поверхности.

4. Фотоэффект безынерционен.

Объяснение установленных закономерностей оказалось невозможным в рамках классической физики. Для их объяснения необходимо привлекать квантовые представления.

3. Уравнение Эйнштейна для внешнего фотоэффекта

А. Эйнштейн, развив квантовую гипотезу Планка, в 1903 г. доказал, что всю энергию излучения можно рассматривать как сосредоточенную в отдельных порциях, т. е. свет (как электромагнитное излучение) излучается, распространяется и поглощается в виде квантов. Поэтому распространение электромагнитных волн нужно рассматривать не как непрерывный волновой процесс, а как поток локализованных в пространстве дискретных квантов, движущихся со скоростью света и называемых **фотонами**. Для монохроматического излучения с частотой ω все фотоны обладают одинаковой энергией $\varepsilon = \hbar\omega = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$. Процесс поглощения света веществом сводится

к тому, что фотоны передают **всю** свою энергию частицам этого вещества, т. е. процесс происходит прерывно (дискретно) в пространстве и во времени. Основываясь на этих представлениях, А. Эйнштейн дал объяснение фотоэффекта. Именно за создание теории фотоэффекта он в 1922 г. получил Нобелевскую премию по физике.

При фотоэффекте в результате поглощения света электрон в веществе получает энергию $\varepsilon = \hbar\omega$. Если $\hbar\omega \geq A_{\text{вых}}$, где $A_{\text{вых}}$ – **работа выхода** (энергия, необходимая электрону, чтобы покинуть твердое тело или жидкость и уйти в вакуум), то электрон эмитируется из вещества, т. е. покидает вещество. Из закона сохранения энергии получаем **уравнение Эйнштейна для фотоэффекта**:

$$\varepsilon = A_{\text{вых}} + E_{\text{кин}}, \quad (7.2)$$

где $\varepsilon = h\nu = h\frac{c}{\lambda} = \hbar\omega$ – энергия падающего на вещество кванта электромагнитного излучения (света), а $E_{\text{кин}}$ – максимальная кинетическая энергия электрона, которая для классического случая $E_{\text{кин}} = \frac{mv^2}{2}$, а для релятивист-

ского $E_{\text{кин}} = mc_0^2 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right)$, где $\beta = v/c$.

Работа выхода, как любая энергия, измеряется в Джоулях, но не менее часто на практике используется и внесистемная единица измерения энергии **электрон-вольт** (1 электрон-вольт = $1,6 \cdot 10^{-19}$ Дж).

Из формулы видно, что

1. если $\varepsilon < A_{\text{вых}}$, то электрон не покидает металла, т. е. фотоэффект не наблюдается.

2. если $\varepsilon = A_{\text{вых}}$, то $\hbar\omega = h\nu = A_{\text{вых}}$. Тогда круговая частота $\omega_{\text{зр}}$ или частота $\nu_{\text{зр}}$ называются **красной границей фотоэффекта**:

$$\omega_{\text{зр}} = \frac{A_{\text{вых}}}{\hbar}, \quad (7.3)$$

$$\nu_{\text{зр}} = \frac{A_{\text{вых}}}{h}. \quad (7.4)$$

Для **длины волны, соответствующей красной границе фотоэффекта**, получим

$$\lambda_{\text{зр}} = cT = c \frac{2\pi}{\omega_{\text{зр}}} = c \frac{2\pi\hbar}{A_{\text{вых}}} = \frac{hc}{A_{\text{вых}}}. \quad (7.5)$$

Красная граница фотоэффекта соответствует той длине волны падающего фотона, больше которой, или той частоте, меньше которой фотоэффект не происходит, поскольку в этом случае энергия кванта будет меньше работы выхода.

Фотоэффект используется в приборах, называемых **фотоэлементами** (вакуумных и газонаполненных колбах с катодом и анодом), служащих для усиления фототока, которые применяются в фотоэлектронных умножителях.

Для прекращения фотоэффекта необходимо предотвратить эмиссию электронов из вещества, для чего прикладывают **задерживающую разность потенциалов**, при этом работа электрического поля равна кинетической энергии вылетающих электронов:

$$\varepsilon = A_{\text{вых}} + eU. \quad (7.6)$$

4. Тормозное рентгеновское излучение. Коротковолновая граница сплошного рентгеновского спектра

Немецкий физик Вильгельм Конрад Рентген (1845–1923) (рис. 7.3, а) в 1895 г. обнаружил, что при бомбардировке металла или стекла быстрыми электронами возникает излучение, обладающее большой проникающей способностью, которое впоследствии было названо **рентгеновским (РГ-излучение, X-лучи, Rё-излучение)**. Это открытие позволило Рентгену стать в 1901 г. первым в истории лауреатом Нобелевской премии по физике.

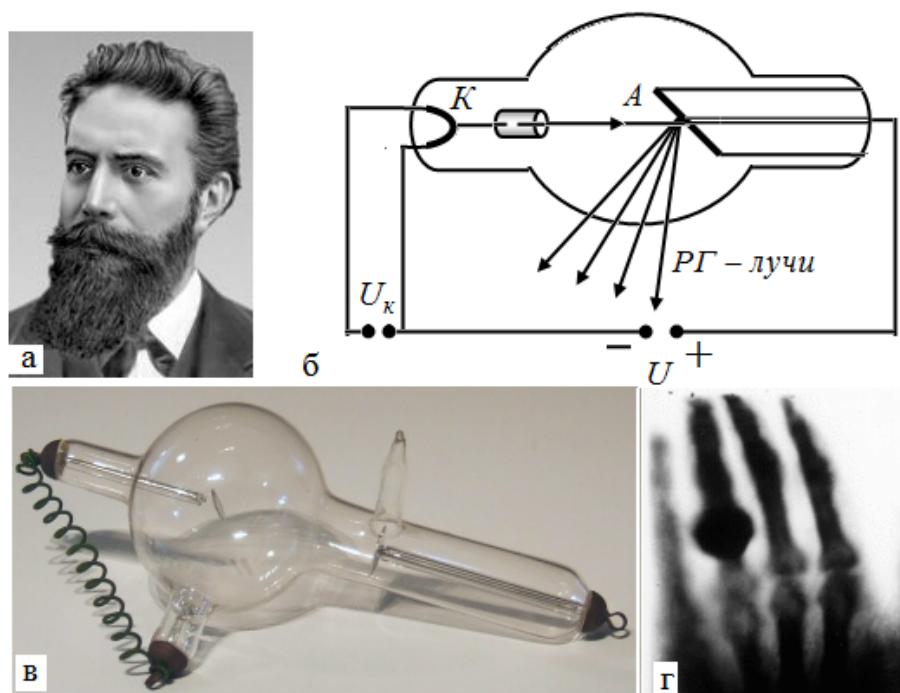


Рисунок 7.3 – Вильгельм Конрад Рентген (а), схема рентгеновской трубки (б); первые рентгеновская трубка (в) и рентгеновский снимок (г)

Рентгеновское излучение – это электромагнитное излучение с длиной волны $\lambda = 10^{-8} - 10^{-12}$ м. Для получения РГ излучения используется вакуумированный баллон – рентгеновская трубка (рис. 7.3, б). Электроны, вылетающие из катода (К) вследствие нагрева его за счет разности потенциалов U_K , ускоряются и фокусируются в фокусирующем цилиндре, а затем ударяются об анод (А), который часто называют антикатод. Аноды обычно изготавливают из металлов, например, W, Cu, Pt и т. п. Попадая в вещество антикатада, электроны тормозятся, при этом испускается электромагнитное излучение, носящее название **тормозного РГ излучения** (нем. – Bremsstrahlung). При больших скоростях электронов наряду с тормозным

возникает характеристическое РГ излучение, природу которого мы рассмотрим позднее.

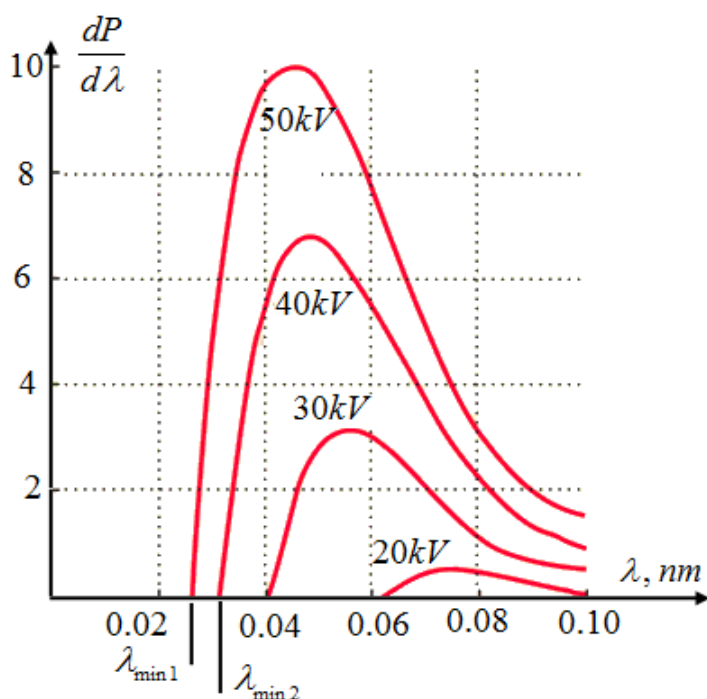
Согласно классической электродинамике при торможении электрона должны возникать волны всех длин (от 0 до ∞), при этом длина волны, на которую приходится максимум излучения, должна уменьшаться с увеличением скорости электронов, которая зависит от разности потенциалов между катодом и анодом рентгеновской трубки. Это подтверждается опытом лишь частично. Кривые распределения мощности не идут к началу координат, а имеют λ_{\min} , которая различна для различных скоростей электронов, налетающих на антикатод.

Объяснение существования коротковолновой границы рентгеновского спектра, т. е. существования λ_{\min} , возможно только на основе квантовых представлений.

Исходя из уравнения Эйнштейна для фотоэффекта, если энергия кванта $\hbar\omega$ значительно превышает работу выхода, $A_{\text{вых}}$, то $\hbar\omega = W_m$. Эту формулу можно интерпретировать и по-другому: не как переход энергии светового кванта в кинетическую энергию электрона, а, наоборот, как переход кинетической энергии электронов, ускоренных разностью потенциалов U , в энергию квантов, возникающих при резком торможении электрона в металле. Тогда

$$eU = \hbar\omega. \quad (7.7)$$

Именно такой процесс и происходит в рентгеновской трубке. Разогнанные разностью потенциалов U между катодом и антикатодом трубки электроны тормозятся в металлическом антикатоде, вследствие чего и возникает тормозное рентгеновское излучение. Спектр этого излучения при разложении по длинам волн оказывается сплошным, как и спектр видимого белого света. Наличие коротковолновой границы объясняется тем, что, поскольку излучение воз-



никнуло при торможении электрона, то оно должно быть непрерывным. Наличие коротковолновой границы объясняется тем, что, поскольку излучение воз-

никает за счет энергии, теряемой электроном при торможении, то энергия кванта $\hbar\omega$ не может быть больше энергии электронов eU . Отсюда следует, что частота излучения не может превышать значения $\omega_{cp} = \omega_{\max} = \frac{eU}{\hbar}$.

Значит, *длина волны коротковолновой границы сплошного рентгеновского спектра* не может быть меньше, чем

$$\lambda_{cp} = \lambda_{\min} = \frac{2\pi\hbar c}{eU} = \frac{hc}{eU} = \frac{1,24}{U}, \quad (7.8)$$

где напряжение выражено в киловольтах, а длина волны в нанометрах. Существование коротковолновой границы сплошного рентгеновского спектра является одним из наиболее ярких проявлений квантовых свойств этого излучения, поскольку с точки зрения классической электродинамики такой границы быть не должно.

Первые рентгеновские трубки были изготовлены Рентгеном (рис. 7.3, в) и им же были обнаружены и описаны основные свойства этого излучения. Было выяснено, что благодаря достаточно высокой энергии кванты РГ излучения легко проходят через ткани живых организмов, и, в частности, человека. На рис. 7.3, г показана одна из первых рентгенограмм в истории медицины. Рентген не взял патент на свое открытие, дав возможность многочисленным конструкторам и изобретателям создавать различные аппараты для самого разнообразного применения. В первое время после открытия, РГ излучение использовалось, по большей части, для исследования переломов костей и определения местоположения инородных тел (например, пуль) в теле человека. В настоящее время применяют несколько методов диагностики с помощью РГ лучей (рентгенодиагностика). К ним относят: рентгеноскопию (получение рентгенограмм с применением рентгеноконтрастного вещества), флюорографию (получение изображений на экране или на пленке с помощью малых доз излучения), рентгенографию (получение рентген-фотографий в нескольких проекциях) и компьютерную рентгеновскую томографию (характеризуется высоким разрешением и позволяет обнаруживать изменения мягких тканей организма). Кроме того, рентгеновское излучение применяется и для лечения, например, онкологических заболеваний, поскольку оно убивает раковые клетки.

Одно из наиболее распространённых применений рентгеновского излучения в промышленности – неразрушающий контроль качества материалов и дефектоскопия (выявление скрытых неоднородностей вещества, трещин,

полостей). В аэропортах на других объектах широко используются рентгено-телевизионные интроскопы, позволяющие просматривать содержимое ручной клади и багажа в целях визуального обнаружения на экране монитора предметов, представляющих опасность.

Рентгеновское излучение применяется также для исследования полотен живописи с целью установления их подлинности или для обнаружения скрытых слоёв краски под основным слоем живописи.

Особенно важным и эффективным является использование рентгеновского излучения в науке, где этот мощнейший метод физического исследования позволяет изучать структуру вещества. Значение рентгеновского дифракционного метода для прогресса современной физики трудно переоценить, поскольку современное понимание свойств веществ основано на понимании расположения атомов и о характере связей между ними.

5. Фотоны. Световое давление

Объяснение закономерностей теплового излучения, фотоэффекта и тормозного РГ излучения показали правомерность квантовой гипотезы Планка и гипотезы Эйнштейна о световых квантах – **фотонах**.

Свет частоты ω по Эйнштейну – это поток фотонов с энергией $\varepsilon = \hbar\omega$. Поскольку свет распространяется в вакууме со скоростью c , то и фотоны должны иметь ту же скорость. Но согласно СТО полная энергия любой частицы, движущейся со скоростью v , определяется как $E = m_0 c^2 / \sqrt{1 - (v/c)^2}$. Т. к. для фотона $v = c$, то знаменатель этого выражения обращается в нуль. Для фотона, имеющего конечную энергию, это возможно лишь при условии $m_0 = 0$, т. е. масса покоя фотона равна нулю.

По формуле, связывающей энергию частицы и ее импульс $E^2 - p^2 c^2 = m_0^2 c^4$, приняв $m_0 = 0$ и $E = \varepsilon = \hbar\omega$, получим **импульс фотона** в виде

$$p = \frac{\hbar\omega}{c} = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{cT} = \frac{h}{\lambda}. \quad (7.9)$$

Волновым числом называется величина $k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi\nu}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$, тогда

$$p = \hbar k. \quad (7.10)$$

Но поскольку импульс – векторная величина, то

$$\vec{p} = \hbar \vec{k}, \quad (7.11)$$

где \vec{k} – волновой вектор, модуль которого равен волновому числу k .

Обратим внимание на тот факт, что частота и волновой вектор характеризуют волновые свойства монохроматического света, а энергия и импульс – корпускулярные. Кроме того, фотон как частица имеет весьма своеобразные свойства: его масса покоя равна нулю и его единственное состояние – движение со скоростью света, одинаковой во всех системах отсчета.

Одним из основных экспериментальных подтверждений наличия у фотона импульса есть *световое давление*, предсказанное и рассчитанное Максвеллом на основе волновой природы света и экспериментально подтвержденное Петром Лебедевым (1866–1912) (рис. 7.4, а). Он в 1900 г. измерил давление света на твердые тела, используя чувствительные крутильные весы. В его опытах (рис. 7.4, б) в вакуумированном сосуде на тонкой серебряной нити подвешивались крутильные весы, к коромыслам которых были прикреплены тонкие диски из слюды и различных металлов. Попеременно облучая белую (отражающую) поверхность одного диска и черную (поглощающую) поверхность другого диска, Лебедев измерил световое давление и получил удовлетворительное совпадение с предсказаниями теории Максвелла.

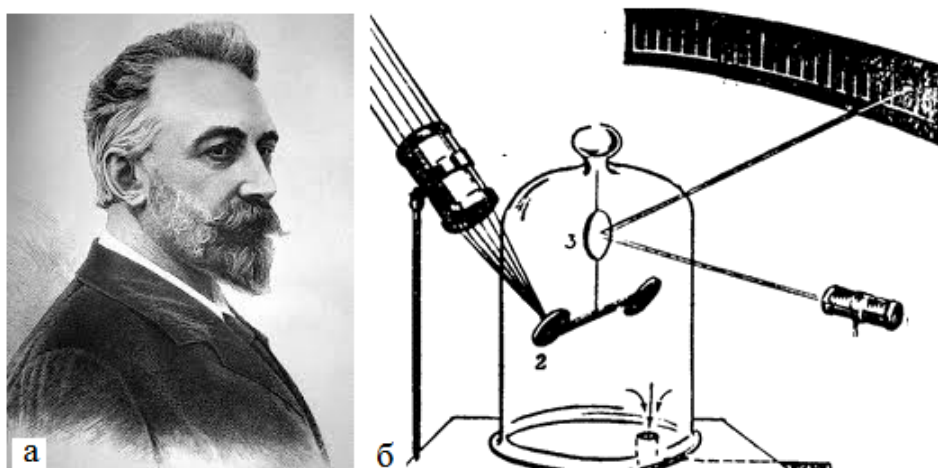


Рисунок 7.4 – П.Н.Лебедев (а), его экспериментальная установка (б)

С квантовой точки зрения давление света обусловлено тем, что при соударении света с поверхностью каждый фотон передает ей свой импульс. Реально отражение света поверхностью есть сложный процесс «переизлу-

чения», т. е. поглощения, а затем излучения фотона веществом. Но упрощенно его можно рассматривать как зеркальное отражение «упругих» шариков.

Рассмотрим поток монохроматического излучения, падающего перпендикулярно поверхности. Пусть в единицу времени на единицу площади падает n фотонов, имеющих частоту ν . Если коэффициент отражения ρ , то ρn фотонов отражается, а $(1 - \rho)n$ фотонов поглощается. Каждый отраженный фотон передает поверхности импульс $2p = 2\frac{h\nu}{c}$, а поглощенный – импульс $p = \frac{h\nu}{c}$.

Давление света (P) на поверхность равно импульсу, который передают поверхности за 1 секунду все n фотонов:

$$P = \frac{2h\nu}{c}\rho n + \frac{h\nu}{c}(1 - \rho)n = \frac{nh\nu}{c}(1 + \rho) = \frac{E}{c}(1 + \rho). \quad (7.12)$$

6. Комптон-эффект

Квантовые свойства света наиболее отчетливо проявляются в эффекте, обнаруженном американским физиком, лауреатом Нобелевской премии 1927 г. Артуром Комптоном (1892–1962) (рис. 7.5, а) в 1923 г. при рассеянии монохроматического РГ излучения легкими веществами (графитом, парафином и т. п.).

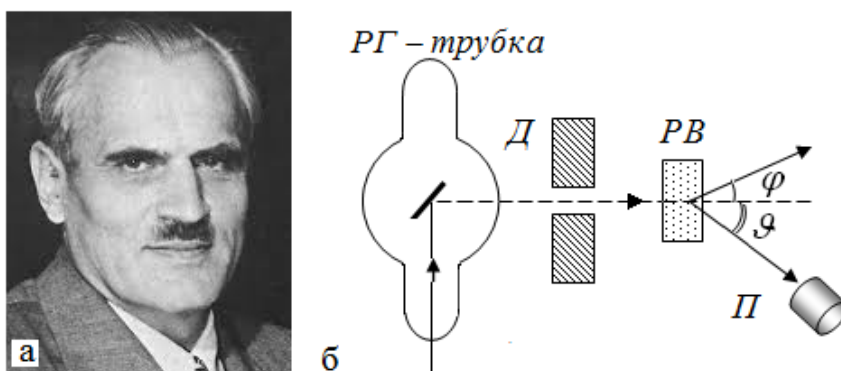


Рисунок 7.5 – Артур Комптон (а), схема эксперимента (б)

Опыт, схема которого представлена на рис. 7.5, б, состоял в том, что пучок РГ-лучей, пройдя через узкую диафрагму (Д), попадает на рассеи-

вающее вещество (РВ), а после рассеяния – в приемник (П) – РГ-спектрограф, где измеряют длину волны рассеянного излучения. Обнаружено, что разность между длинами волн РГ-излучения до и после рассеяния зависит только от угла рассеяния ϑ и имеет вид

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = 2\lambda_c \sin^2\left(\frac{\vartheta}{2}\right) = \lambda_c (1 - \cos \vartheta), \quad (7.13)$$

где $\lambda_c = 2,43 \cdot 10^{-12}$ м – **комptonовская длина волны** для электрона.

Особенности Комптон-эффекта можно объяснить, рассматривая процесс упругого соударения РГ-фотонов с практически свободными электронами.

При Комптон-эффекте выполняются закон сохранения энергии

$$\varepsilon_\phi = \varepsilon'_\phi + \varepsilon'_e, \quad (7.14)$$

и закон сохранения импульса:

$$\vec{p}_\phi = \vec{p}'_e + \vec{p}'_\phi, \quad (7.15)$$

где ε_ϕ и \vec{p}_ϕ , ε'_ϕ и \vec{p}'_ϕ – энергии и импульсы фотонов падающего и рассеянного под углом ϑ (**угол рассеяния**), соответственно, ε'_e и \vec{p}'_e – энергия и импульс электрона отдачи, распространяющегося под углом φ (**угол отдачи**) к направлению падения фотона; $\alpha = \vartheta + \varphi$ – **угол разлета** (рис. 7.6).

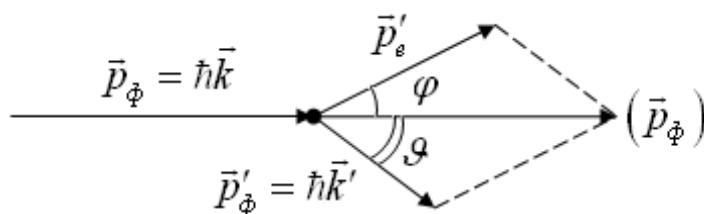


Рисунок 7.6 – Закон сохранения импульса

Пусть на покоящийся свободный электрон падает фотон.

	Энергия		Импульс	
	до	после	до	после
Фотон	$\hbar\omega$	$\hbar\omega'$	$\hbar\vec{k}$	$\hbar\vec{k}'$
Электрон	m_0c^2	$c\sqrt{p'^2 + m^2c^2}$	0	\vec{p}'

Запишем

1) закон сохранения энергии $\hbar\omega + m_0c^2 = \hbar\omega' + c\sqrt{p'^2 + m_0^2c^2}$ и разделим обе части на c :

$$\sqrt{p'^2 + m_0^2c^2} = \hbar\left(\frac{\omega}{c} - \frac{\omega'}{c}\right) + m_0c,$$

$$\sqrt{p'^2 + m_0^2c^2} = \hbar(k - k') + m_0c.$$

Возведем обе части в квадрат и получим:

$$p'^2 + m_0^2c^2 = \hbar^2(k^2 + k'^2 - 2kk') + m_0^2c^2 + 2\hbar m_0c(k - k'),$$

откуда

$$p'^2 = \hbar^2(k^2 + k'^2 - 2kk') + 2\hbar m_0c(k - k'). \quad (7.16)$$

2) закон сохранения импульса:

$$\hbar\vec{k} = \vec{p}' + \hbar\vec{k}',$$

$$p'^2 = \hbar^2(\vec{k} - \vec{k}')^2$$

$$p'^2 = \hbar^2(k^2 + k'^2 - 2kk'\cos\alpha), \quad (7.17)$$

Приравняем выражения для p'^2 из законов сохранения энергии и импульса:

$$\hbar^2(k^2 + k'^2 - 2kk') + 2\hbar m_0c(k - k') = \hbar^2(k^2 + k'^2 - 2kk'\cos\vartheta),$$

$$\hbar k^2 + \hbar k'^2 - 2\hbar kk' + 2m_0c(k - k') = \hbar k^2 + \hbar k'^2 - 2\hbar kk'\cos\vartheta,$$

$$2m_0c(k - k') = 2\hbar kk'(1 - \cos\vartheta).$$

Умножим обе части на $\frac{\pi}{m_0c\hbar k k'}$:

$$\frac{2\pi m c}{m_0c\hbar k k'}(k - k') = \frac{2\pi\hbar k k'}{m_0c\hbar k k'}(1 - \cos\vartheta),$$

$$\frac{2\pi k}{kk'} - \frac{2\pi k'}{kk'} = \frac{2\pi\hbar}{m_0c}(1 - \cos \vartheta),$$

$$\lambda' - \lambda = \frac{2\pi\hbar}{m_0c}(1 - \cos \vartheta).$$

Сравнивая теоретическую формулу с экспериментальным выражением $\lambda' - \lambda = \lambda_c(1 - \cos \vartheta)$, получим значение **комптоновской длины волны**:

$$\lambda_c = \frac{2\pi\hbar}{m_0c} = \frac{h}{m_0c}. \quad (7.18)$$

Комптоновская длина волны электрона равна

$$\lambda_c = \frac{h}{m_0c} = \frac{6,63 \cdot 10^{-34}}{9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 3 \cdot 10^8} = 2,43 \cdot 10^{-12} \text{ м} = 2,43 \text{ пм}. \quad (7.19)$$

7. Заключение к теме «Оптика». Корпускулярно-волновой дуализм

Одним из наиболее значительных достижений физики XX века явилось преодоление противопоставления волновых и квантовых свойств света.

Свойства непрерывности, характерные для электромагнитного поля световой волны, не исключают свойств дискретности, характерных для световых квантов – фотонов, т. е. это диалектическое единство двух противоположностей (**корпускулярно-волновой дуализм**).

В проявлении этих двух противоположных свойств имеется определенная закономерность. С уменьшением длины волны (возрастанием частоты) сильнее проявляются квантовые свойства света (красная граница фотоэффекта, фотохимические реакции), а волновые свойства – слабее (например, дифракция РГ-лучей обнаружена только на кристаллической решетке). Для длинноволнового излучения основную роль играют волновые свойства.

Корпускулярные и волновые свойства не исключают, а взаимно дополняют друг друга. Они отражают две различные, но тесно взаимосвязанные закономерности распространения электромагнитного излучения и его взаимодействие с веществом. Корпускулярные свойства обусловлены тем, что энергия, импульс и масса излучения локализованы в дискретных «частицах» – фотонах, волновые – статистическими закономерностями распределения фотонов в пространстве, т. е. закономерностями, определяющими вероятности нахождения фотонов в различных точках пространства.

II. ЗАДАЧИ

Задача 7.1

Длина волны света, соответствующая красной границе фотоэффекта, для некоторого металла $\lambda_{cp} = 275$ нм. Найти минимальную энергию фотона ε_{min} , вызывающего фотоэффект; работу выхода $A_{вых}$ электрона из металла; максимальную скорость v_{max} и максимальную кинетическую энергию $E_{кин}$ электронов, вырываемых из металла светом с длиной волны 1) $\lambda = 180$ нм; 2) $\lambda = 1,2$ мкм.

Решение

Из уравнения Эйнштейна для фотоэффекта $\varepsilon = A_{вых} + E_{кин}$ следует, фотоэффект будет происходить в том случае, если энергия ε падающего фотона больше или равна работе выхода $A_{вых}$ электрона из металла

$$\varepsilon \geq A_{вых}.$$

Граничный случай соответствует равенству энергии фотона и работы выхода:

$$\frac{hc}{\lambda_{cp}} = A_{вых},$$

откуда

$$A_{вых} = \frac{hc}{\lambda_{cp}} = \frac{6,62 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{275 \cdot 10^{-9}} = 7,2 \cdot 10^{-19} \text{ Дж} = 4,5 \text{ эВ}.$$

Минимальная энергия фотона равна

$$\varepsilon_{min} = A_{вых} = 7,2 \cdot 10^{-19} \text{ Дж} = 4,5 \text{ эВ}.$$

1) Если металл освещается светом с длиной волны $\lambda = 180$ нм, то кинетическая энергия вылетающих электронов

$$E_{кин} = \varepsilon - A_{вых} = \frac{hc}{\lambda} - A_{вых} = \frac{6,62 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{180 \cdot 10^{-9}} = 1,1 \cdot 10^{-18} \text{ Дж} = 6,9 \text{ эВ}.$$

Учитывая, что максимальная кинетическая энергия фотоэлектронов

$$E_{кин} = \frac{mv^2}{2}, \text{ их максимальная скорость равна}$$

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{2E_{\max}}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1,1 \cdot 10^{-18}}{9,1 \cdot 10^{-31}}} = 1,55 \cdot 10^6 \text{ м/с.}$$

2) Если металл освещается светом с длиной волны $\lambda = 1,2 \text{ пм} = 1,2 \cdot 10^{-12} \text{ м}$, то в этом случае энергия фотона, равная

$$\varepsilon = \frac{hc}{\lambda} = \frac{6,625 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{1,2 \cdot 10^{-12}} = 1,7 \cdot 10^{-13} \text{ Дж} = 1,03 \cdot 10^6 \text{ эВ},$$

много больше работы выхода электрона из металла $A_{\text{вых}} = 4,5 \text{ эВ}$. Поэтому, пренебрегая работой выхода, можно считать, что кинетическая энергия электрона равна энергии фотона. Кинетическая энергия при этом рассчитывается по релятивистской формуле

$$E_{\text{кин}} = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} - 1 \right).$$

Выразим β , учитывая, что $E_{\text{кин}} = \varepsilon$, и окончательно получим

$$\beta = \sqrt{1 - \left(\frac{m_0 c^2}{E_{\max} + m_0 c^2} \right)^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 9 \cdot 10^{16}}{1,7 \cdot 10^{-13} + 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 9 \cdot 10^{16}} \right)^2} = 0,95.$$

Откуда

$$v_{\max} = \beta c = 2,83 \cdot 10^8 \text{ м/с.}$$

Задача 7.2

Найти частоту ν света, вырывающего из металла электроны, которые полностью задерживаются разностью потенциалов $U = 3 \text{ В}$. Фотоэффект начинается при частоте падающего света $\nu_{\text{зр}} = 6 \cdot 10^{14} \text{ Гц}$. Найти работу выхода электрона из металла.

Решение

Условием реализации фотоэффекта является равенство энергии падающего фотона и работы выхода электрона из металла, т. е. той энергии, которую необходимо затратить для удаления электрона из металла:

$$A_{\text{вых}} = h\nu_{\text{зр}} = 6,62 \cdot 10^{-34} \cdot 6 \cdot 10^{14} = 3,98 \cdot 10^{-19} \text{ Дж} = 2,48 \text{ эВ.}$$

Из уравнения Эйнштейна для фотоэффекта $\varepsilon = A_{\text{вых}} + E_{\text{кин}}$ следует, что для его прекращения, необходимо, чтобы работа электрического поля, задерживающего электроны, была равна их кинетической энергии $E_{\text{кин}} = eU$. Тогда

$$h\nu = h\nu_{\text{зп}} + eU,$$

откуда

$$\nu = \frac{A_{\text{вых}} + eU}{h} = \frac{3,98 \cdot 10^{-19} + 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 3}{6,62 \cdot 10^{-34}} = 1,33 \cdot 10^{15} \text{ Гц.}$$

Задача 7.3

Фотоны с энергией $\varepsilon = 4,9$ эВ вырывают электроны из металла с работой выхода $A_{\text{вых}} = 4,5$ эВ. Найти максимальный импульс p_{max} , передаваемый поверхности металла при вылете каждого электрона.

Решение

Из уравнения Эйнштейна для фотоэффекта максимальная кинетическая энергия электронов, вылетающих из металла,

$$E_{\text{кин}} = \varepsilon - A_{\text{вых}} = 4,9 - 4,5 = 0,4 \text{ эВ} = 6,4 \cdot 10^{-20} \text{ Дж.}$$

До вылета электрона импульс системы «электрон – металл» был равен нулю. По закону сохранения импульса суммарный импульс системы остается неизменным, поэтому максимальный импульс p_{max} , передаваемый поверхности металла при вылете электрона, равен по модулю импульсу электрона в момент его вылета. Используя связь между кинетической энергией E и импульсом p из классической физики

$$E = \frac{mv^2}{2} = \frac{(mv)^2}{2m} = \frac{p^2}{2m},$$

получим

$$p_{\text{max}} = \sqrt{2mE_{\text{max}}} = \sqrt{2 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 6,4 \cdot 10^{-20}} = 3,4 \cdot 10^{-25} \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}}.$$

Задача 7.4

Когда длину волны излучения, падающего на катод фотоэлемента, уменьшили с $\lambda_1 = 600$ нм до $\lambda_2 = 400$ нм, максимальная скорость фотоэлектронов изменилась в два раза. Определить красную границу фотоэффекта λ_{cp} для данного вещества.

Решение

Запишем уравнения Эйнштейна для фотоэффекта в двух случаях, рассматриваемых в задаче,

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = A_{\text{вых}} + E_{\text{кин}1}, \\ \varepsilon_2 = A_{\text{вых}} + E_{\text{кин}2}. \end{cases}$$

где $\varepsilon_1 = \frac{hc}{\lambda_1}$ и $\varepsilon_2 = \frac{hc}{\lambda_2}$ – энергии фотонов падающих излучений, а

$E_{\text{кин}1} = \frac{mv_{\text{max}1}^2}{2}$ и $E_{\text{кин}2} = \frac{mv_{\text{max}2}^2}{2}$ – кинетические энергии фотоэлектронов.

Из того, что $\lambda_1 > \lambda_2$, следует, что $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$. Тогда при данной работе выхода $A_{\text{вых}}$ кинетические энергии соотносятся как $E_{\text{кин}2} > E_{\text{кин}1}$, а это значит, что $v_{\text{max}2} > v_{\text{max}1}$. С учетом условия задачи, $v_{\text{max}2} = 2v_{\text{max}1}$.

$$\begin{cases} \frac{hc}{\lambda_1} = A_{\text{вых}} + \frac{mv_{\text{max}1}^2}{2}, \\ \frac{hc}{\lambda_2} = A_{\text{вых}} + \frac{mv_{\text{max}2}^2}{2}, \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{hc}{\lambda_1} = A_{\text{вых}} + \frac{mv_{\text{max}1}^2}{2}, \\ \frac{hc}{\lambda_2} = A_{\text{вых}} + \frac{m4v_{\text{max}1}^2}{2}. \end{cases}$$

Умножим обе части первого уравнения на 4 и вычтем из него второе уравнение:

$$\frac{4hc}{\lambda_1} - \frac{hc}{\lambda_2} = 4A_{\text{вых}} - A_{\text{вых}} + \frac{m4v_{\text{max}1}^2}{2} - \frac{m4v_{\text{max}1}^2}{2} = 3A_{\text{вых}},$$

$$A_{\text{вых}} = \frac{hc}{3} \left(\frac{4}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} \right).$$

Поскольку $A_{\text{вых}} = \frac{hc}{\lambda_{\text{зр}}}$, то $\frac{hc}{\lambda_{\text{зр}}} = \frac{hc}{3} \left(\frac{4}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} \right) = \frac{hc}{3} \left(\frac{4\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_1 \cdot \lambda_2} \right)$.

Отсюда

$$\lambda_{\text{зр}} = \frac{3 \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_2}{4\lambda_1 - \lambda_2} = \frac{3 \cdot 600 \cdot 10^{-9} \cdot 400 \cdot 10^{-9}}{4 \cdot 600 \cdot 10^{-9} - 400 \cdot 10^{-9}} = 3,6 \cdot 10^{-7} \text{ м} = 360 \text{ нм}.$$

Задача 7.5

Задерживающее напряжение при освещении некоторого металла светом с длиной волны $\lambda_1 = 491$ нм равно $U_1 = 0,7$ В. При смене источника света задерживающее напряжение увеличилось до $U_2 = 1,43$ В. Какова длина волны λ_2 второго источника света. Чему равна работа выхода для данного металла?

Решение

Запишем уравнения Эйнштейна для первого и второго излучений:

$$\begin{cases} \frac{hc}{\lambda_1} = A_{\text{вых}} + E_{\text{кин}1}, \\ \frac{hc}{\lambda_2} = A_{\text{вых}} + E_{\text{кин}2}. \end{cases}$$

Учтем, что задерживающая разность потенциалов определяется максимальной кинетической энергией электронов, т.е. $E_{\text{кин}1} = eU_1$, а $E_{\text{кин}2} = eU_2$, тогда

$$\begin{cases} \frac{hc}{\lambda_1} = A_{\text{вых}} + eU_1, \\ \frac{hc}{\lambda_2} = A_{\text{вых}} + eU_2, \end{cases}$$

где $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл – заряд электрона.

Получили два уравнения с двумя неизвестными – длиной волны λ_2 и работой выхода $A_{\text{вых}}$. Вычтем из второго уравнения первое и найдем искомую длину волны λ_2 :

$$\frac{hc}{\lambda_2} - \frac{hc}{\lambda_1} = e(U_2 - U_1),$$

$$\lambda_2 = \frac{hc}{\frac{hc}{\lambda_1} + e(U_2 - U_1)} = \frac{\lambda_1 hc}{hc + \lambda_1 e(U_2 - U_1)} = \frac{\lambda_1}{1 + \frac{\lambda_1 e}{hc}(U_2 - U_1)},$$

$$\lambda_2 = \frac{\lambda_1}{1 + \frac{\lambda_1 e}{hc}(U_2 - U_1)} = \frac{4,91 \cdot 10^{-7} \lambda_1}{1 + \frac{4,91 \cdot 10^{-7} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}}{6,62 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}(1,43 - 0,7)} = 3,81 \cdot 10^{-7} \text{ м.}$$

Выразим работу выхода из первого уравнения системы:

$$A_{\text{вых}} = \frac{hc}{\lambda_1} - eU_1.$$

Подставив численные значения, получим

$$A_{\text{вых}} = \frac{6,62 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{4,91 \cdot 10^{-7}} - 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 0,7 = 2,93 \text{ Дж} = 1,83 \text{ эВ.}$$

Задача 7.6

Определить установившийся заряд металлического шарика радиусом $R = 5$ см, который облучается светом с длиной волны $\lambda = 360$ нм, если работа выхода электрона из металла составляет $A_{\text{вых}} = 3,5 \cdot 10^{-19}$ Дж.

Решение

При фотоэффекте металлический шарик, из которого вылетают электроны, теряет отрицательный заряд и становится положительно заряженным. Как следствие, отрицательно заряженные электроны под действием электрического поля шарика начинают возвращаться обратно. В этом случае заряд шарика считается установившимся, а соответствующий ему потенциал можно найти из следующего условия:

$$E_{\text{кин}} = e\varphi.$$

С учетом того, что $E_{кин} = \frac{mv_{max}^2}{2}$, а потенциал поля заряженного шарика $\varphi = k \frac{q}{R}$, где $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \text{ Н} \cdot \text{м}^2 / \text{Кл}^2$, а q и R – заряд и радиус шарика, соответственно, получим

$$\frac{mv_{max}^2}{2} = e\varphi = k \frac{eq}{R}.$$

Из уравнения Эйнштейна для фотоэффекта

$$E_{кин} = \varepsilon - A_{вых} = \frac{hc}{\lambda} - A_{вых}.$$

Тогда

$$\frac{hc}{\lambda} - A_{вых} = k \frac{eq}{R},$$

откуда

$$q = \frac{R}{ke} \left(\frac{hc}{\lambda} - A_{вых} \right).$$

Подстановка численных значений дает

$$q = \frac{0,05}{9 \cdot 10^9 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}} \left(\frac{6,62 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{360 \cdot 10^{-9}} - 3,5 \cdot 10^{-19} \right) = 6,9 \cdot 10^{-12} \text{ Кл}.$$

Задача 7.7

Найти длину волны коротковолновой границы сплошного рентгеновского спектра, если скорость электронов, подлетающих к антикатоду трубки $v = 0,85c$, где c – скорость света.

Решение

Длина волны коротковолновой границы сплошного рентгеновского спектра определяется выражением

$$\lambda_{min} = \frac{hc}{eU},$$

где U – напряжение на рентгеновской трубке; h – постоянная Планка; e – элементарный заряд.

Работа электрического поля, находящегося между катодом и антикатодом (анодом) рентгеновской трубки, затрачивается на ускорение электронов, в результате чего возрастает их скорость и кинетическая энергия. Поскольку в данной задаче скорость электронов близка к скорости света, используем релятивистскую формулу для кинетической энергии:

$$eU = E_{\text{кин}} = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} - 1 \right).$$

Тогда

$$\lambda_{\min} = \frac{hc}{eU} = \frac{hc}{m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} - 1 \right)} = \frac{6,62 \cdot 10^{-34}}{9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 3 \cdot 10^8 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - (0,85)^2}} - 1 \right)} = 2,7 \cdot 10^{-12} \text{ м}.$$

Задача 7.8

После увеличения напряжения на рентгеновской трубке в $n = 2$ раза первоначальная длина волны λ_{\min} коротковолновой границы сплошного рентгеновского спектра изменилась на $\Delta\lambda = 50 \text{ нм}$. Найти λ_{\min} .

Решение

При увеличении напряжения на рентгеновской трубке длина волны коротковолновой границы сплошного рентгеновского спектра $\lambda_{\min} = \frac{hc}{eU}$ будет уменьшаться. Тогда

$$\begin{cases} \lambda_{\min 1} = \frac{hc}{eU_1}, \\ \lambda_{\min 2} = \lambda_{\min 1} - \Delta\lambda = \frac{hc}{eU_2}. \end{cases}$$

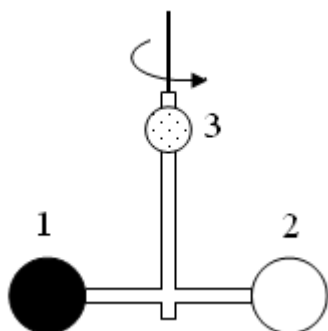
Разделив второе уравнение системы на первое, получим

$$\frac{\lambda_{\min 2}}{\lambda_{\min 1}} = \frac{\lambda_{\min 1} - \Delta\lambda}{\lambda_{\min 1}} = \frac{U_1}{U_2} = \frac{U_1}{nU_1} = \frac{1}{n}.$$

Отсюда

$$\lambda_{min1} = \frac{n}{n-1} \Delta\lambda = \frac{2 \cdot 50 \cdot 10^{-12}}{2-1} = 10^{-10} \text{ м.}$$

Задача 7.9



В опыте П.Н. Лебедева стеклянная крестовина, подвешенная на нити и имеющая на концах зачерненный (1) и зеркальный блестящий (2) кружки диаметром $d = 5$ мм каждый, освещается светом с длиной волны $\lambda = 600$ нм.

Если свет падает на блестящий кружок, то в результате поворота нити световой «зайчик» от закрепленного на ней зеркала (3) на шкале, отстоящей от него на расстояние $b = 1,4$ м, смещается на $a = 80$ мм. Расстояние от центра кружка до оси вращения $l = 9,2$ мм, коэффициент отражения блестящего кружка $\rho = 0,5$ и постоянная вращающего момента $k = 2,5 \cdot 10^{-11}$ Н·м/рад. Найти: 1) световое давление P ; 2) световую энергию E , падающую в единицу времени на единицу площади поверхности блестящего кружка; 3) мощность N падающего света; 4) число фотонов n , падающих в единицу времени на единицу площади поверхности кружков.

Решение

1) Световое давление $P = \frac{F}{S}$, где F – сила светового давления на кружок площадью S .

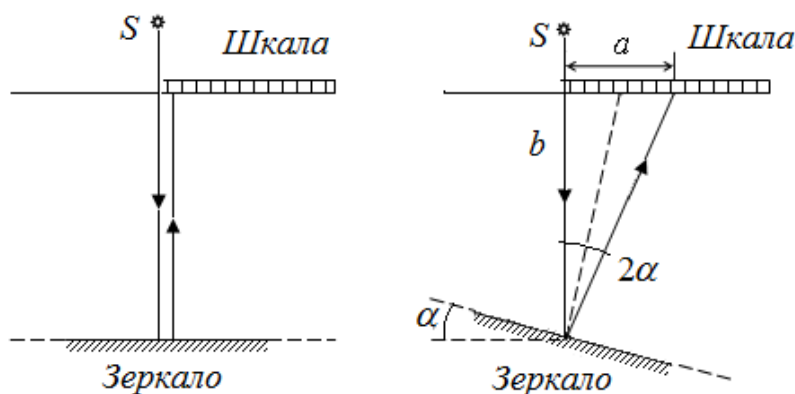
С другой стороны, нить, на которой подвешено коромысло с кружочками на концах, при освещении под действием вращающего момента $M = F \cdot l$, поворачивается на угол α , следовательно, $M = k \cdot \alpha$. Сила F равна $F = \frac{k\alpha}{l}$, а световое давление

$$P = \frac{F}{S} = \frac{k\alpha}{Sl}.$$

Если зеркало вследствие поворота коромысла повернулось на угол α , то отраженный от него луч – на угол 2α (см. схему на рисунке). Если рас-

стояние от зеркала до шкалы $b \gg a$ – смещения «зайчика» по шкале, то угол 2α – мал, а значит $\text{tg} 2\alpha \approx 2\alpha = \frac{a}{b}$, откуда $\alpha = \frac{a}{2b}$. Тогда искомое световое давление в окончательном виде выразится как

$$P = \frac{k\alpha}{Sl} = \frac{4ka}{2b\pi d^2 l} = \frac{4 \cdot 2,5 \cdot 10^{-11} \cdot 80 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 1,4 \cdot \pi \cdot 25 \cdot 10^{-6} \cdot 9,2 \cdot 10^{-3}} = 4 \cdot 10^{-6} \text{ Па.}$$



2) Световая энергия E , падающая в единицу времени на единицу площади поверхности блестящего кружка, коэффициент отражения от которого $\rho = 0,5$, равна

$$E = \frac{Pc}{1 + \rho} = \frac{4 \cdot 10^{-6} \cdot 3 \cdot 10^8}{1 + 0,5} = 800 \text{ Дж} \cdot \text{с}^{-1} \cdot \text{м}^{-2}.$$

3) Мощность света N , падающего на кружок площадью $S = \frac{\pi d^2}{4}$,

$$N = E \cdot S = Pc \cdot \frac{\pi d^2}{4} = \frac{4 \cdot 10^{-6} \cdot 3 \cdot 10^8 \cdot \pi \cdot 25 \cdot 10^{-6}}{4} = 2,4 \cdot 10^{-2} \text{ Вт.}$$

4) Поскольку световой поток состоит из фотонов, искомое количество фотонов n , падающих на 1 м^2 площади в 1 с , связано со световой энергией E , падающей на 1 м^2 площади в 1 с , соотношением $E = n\varepsilon = nh\nu = n \frac{hc}{\lambda}$.

Отсюда

$$n = \frac{E\lambda}{hc} = \frac{800 \cdot 600 \cdot 10^{-9}}{6,62 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8} = 2,4 \cdot 10^{21}.$$

Задача 7.10

В установке из опыта П. Н. Лебедева (см. предыдущую задачу) при освещении светом зачерненного кружка угол поворота нити оказался равным $\alpha = 0,17^\circ$. Определить: 1) световое давление P ; 2) световую энергию E , падающую в единицу времени на единицу площади поверхности кружка; 3) мощность N падающего света.

Решение

1) Воспользуемся формулой для расчета светового давления P из предыдущей задачи, предварительно выразив значение угла α в радианах: $\alpha = 0,17^\circ = 2,97 \cdot 10^{-3}$ рад. Тогда световое давление определится как

$$P = \frac{k\alpha}{Sl} = \frac{4k\alpha}{\pi d^2 l} = \frac{4 \cdot 2,5 \cdot 10^{-11} \cdot 2,97 \cdot 10^{-3}}{\pi \cdot 25 \cdot 10^{-6} \cdot 9,2 \cdot 10^{-3}} = 4,1 \cdot 10^{-7} \text{ Па.}$$

2) Световая энергия E , падающая в единицу времени на единицу площади поверхности зачерненного кружка, коэффициент отражения от которого $\rho = 0$, равняется

$$E = \frac{Pc}{1 + \rho} = Pc = 4,1 \cdot 10^{-7} \cdot 3 \cdot 10^8 = 123 \text{ Дж} \cdot \text{с}^{-1} \cdot \text{м}^{-2}.$$

3) В свою очередь, мощность падающего света

$$N = E \cdot S = Pc \cdot \frac{\pi d^2}{4} = \frac{4,1 \cdot 10^{-7} \cdot 3 \cdot 10^8 \cdot \pi \cdot 25 \cdot 10^{-6}}{4} = 7,7 \cdot 10^{-4} \text{ Вт.}$$

Задача 7.11

В опыте П.Н. Лебедева на коромысле установки закреплены два кружка, один из которых полностью поглощает, а другой – полностью отражает падающую энергию. При освещении только отражающего кружка измеренное световое давление на него $P_0 = 4 \cdot 10^{-6}$ Па. Если постоянная момента кручения нити $k = 2,5 \cdot 10^{-11}$ Н·м/рад, определить: 1) угол поворота нити при освещении только зачерненного кружка; 2) интенсивность I падающего света.

Решение

1) При взаимодействии с блестящей (зеркальной) поверхностью каждый отраженный фотон передает ей двойной импульс $2p$. Зачерненная поверхность, поглощая падающие на нее фотоны, получает от каждого фотона импульс p . Поскольку давление света (P) на поверхность равно импульсу, который передают поверхности все падающие на нее за 1 секунду фотоны, то световое давление P_q на черный (поглощающий) кружок будет вдвое меньшим, чем световое давление P_o на блестящий (отражающий) кружок:

$$P_q = P_o / 2 = 2 \cdot 10^{-6} \text{ Па.}$$

Тогда, воспользовавшись формулой задачи 7.9, угол поворота нити

$$\alpha = \frac{P_q S l}{k} = \frac{P_q \pi d^2 l}{4k} = \frac{2 \cdot 10^{-6} \cdot \pi \cdot 25 \cdot 10^{-6} \cdot 9,2 \cdot 10^{-3}}{4 \cdot 2,5 \cdot 10^{-11}} = 1,45 \cdot 10^{-2} \text{ рад} = 0,73^\circ.$$

2) Интенсивность I света численно равна световой энергии E , падающей в единицу времени на единицу площади поверхности зачерненного кружка, коэффициент отражения от которого $\rho = 0$. Поэтому

$$I = E = \frac{P_q c}{1 + \rho} = \frac{2 \cdot 10^{-6} \cdot 3 \cdot 10^8}{1} = 600 \text{ Вт/м}^2.$$

Задача 7.12

На поверхность площадью 100 см^2 ежеминутно падает 120 Дж световой энергии. Найти световое давление в случаях, когда поверхность

1) полностью отражает; 2) полностью поглощает все излучение.

Решение

1) Когда поверхность полностью отражает все падающее на нее излучение коэффициент отражения $\rho = 1$, световое давление

$$P = \frac{E}{c}(1 + \rho) = \frac{2E}{c}.$$

Количество энергии, падающее на 1 м^2 площади в 1 с , равно

$$E = \frac{W}{St},$$

поэтому

$$P = \frac{2E}{c} = \frac{2W}{cSt} = \frac{2 \cdot 120}{3 \cdot 10^8 \cdot 100 \cdot 10^{-4} \cdot 60} = 1,33 \cdot 10^{-6} \text{ Па.}$$

2). Если поверхность полностью поглощает падающее на нее излучение, то ее коэффициент отражения $\rho = 0$. Тогда

$$P = \frac{E}{c}(1 + \rho) = \frac{E}{c} = \frac{W}{cSt} = \frac{2 \cdot 120}{3 \cdot 10^8 \cdot 100 \cdot 10^{-4} \cdot 60} = 6,67 \cdot 10^{-7} \text{ Па.}$$

Задача 7.13

Монохроматическое излучение частотой $\nu = 5 \cdot 10^{14}$ Гц нормально падает на поверхность с коэффициентом отражения $\rho = 0,75$, производя при этом световое давление $P = 20$ мкПа. Определить: 1) концентрацию n_0 фотонов в пучке; 2) число n фотонов, падающих на 1 м^2 площади за 1 с .

Решение

1) Концентрация n_0 фотонов – это количество фотонов, содержащихся в единице объема светового пучка. Ее можно вычислить, зная объемную плотность энергии w , т. е. энергию единицы объема, и энергию одного фотона $\varepsilon = h\nu$:

$$n_0 = \frac{w}{\varepsilon}.$$

Из формулы $P = w(1 + \rho)$ выразим объемную плотность энергии $w = \frac{P}{1 + \rho}$ и получим

$$n_0 = \frac{w}{\varepsilon} = \frac{P}{(1 + \rho)h\nu} = \frac{20 \cdot 10^{-6}}{(1 + 0,75) \cdot 6,62 \cdot 10^{-34} \cdot 5 \cdot 10^{14}} = 3,45 \cdot 10^{13} \text{ м}^{-3}.$$

2) Количество n фотонов, падающих на 1 м^2 площади за 1 с , связано с величиной световой энергии E , падающей на 1 м^2 площади в 1 с , и энергией одного фотона $\varepsilon = h\nu$ соотношением

$$E = n\varepsilon = nh\nu.$$

Поскольку $E = \frac{Pc}{(1 + \rho)}$, то

$$n = \frac{E}{h\nu} = \frac{Pc}{(1 + \rho)h\nu}.$$

Сравнивая это выражение с результатом, полученным в первой части данной задачи, запишем искомое количество фотонов в виде

$$n = \frac{E}{h\nu} = \frac{Pc}{(1 + \rho)h\nu} = n_0 c = 3,45 \cdot 10^{13} \cdot 3 \cdot 10^8 = 1,035 \cdot 10^{22} \text{ м}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}.$$

Задача 7.14

Какова была длина волны рентгеновского излучения, если при комптоновском рассеянии этого излучения графитом под углом $\vartheta = 60^\circ$ длина волны рассеянного излучения оказалась равной $\lambda' = 25,4 \text{ пм}$? Найти: 1) энергии и импульсы падающего (ε_ϕ , p_ϕ) и рассеянного (ε'_ϕ , p'_ϕ) фотонов; 2) энергию ε'_e , импульс p'_e и скорость v электрона отдачи; 3) углы отдачи φ и разлета α .

Решение

Для нахождения длины волны падающего рентгеновского излучения воспользуемся выражением для комптоновского сдвига:

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \lambda_c (1 - \cos \vartheta).$$

$$\lambda = \lambda' - \lambda_c (1 - \cos \vartheta) = 25,4 - 2,43(1 - \cos 60^\circ) = 24,19 \text{ пм}.$$

Найдем энергии падающего ε_ϕ и рассеянного фотонов ε'_ϕ :

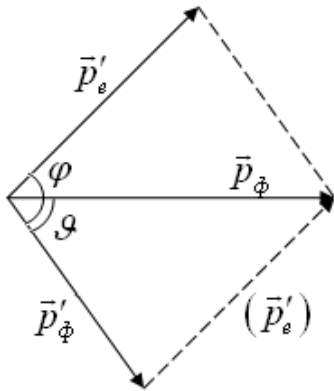
$$\varepsilon_\phi = \frac{hc}{\lambda} = \frac{6,62 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{24,19 \cdot 10^{-12}} = 8,22 \cdot 10^{-15} \text{ Дж},$$

$$\varepsilon'_\phi = \frac{hc}{\lambda} = \frac{6,62 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{25,4 \cdot 10^{-12}} = 7,82 \cdot 10^{-15} \text{ Дж.}$$

Энергию электрона отдачи найдем с помощью закона сохранения энергии:

$$\varepsilon_\phi = \varepsilon'_\phi + \varepsilon'_e.$$

$$\varepsilon'_e = \varepsilon_\phi - \varepsilon'_\phi = 8,22 \cdot 10^{-15} - 7,82 \cdot 10^{-15} = 4 \cdot 10^{-16} \text{ Дж.}$$



Импульсы падающего p_ϕ и рассеянного фотонов p'_ϕ :

$$p_\phi = \frac{h}{\lambda} = \frac{6,62 \cdot 10^{-34}}{24,19 \cdot 10^{-12}} = 2,74 \cdot 10^{-23} \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}},$$

$$p'_\phi = \frac{h}{\lambda'} = \frac{6,62 \cdot 10^{-34}}{25,4 \cdot 10^{-12}} = 2,6 \cdot 10^{-23} \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}}.$$

Для нахождения импульса электрона отдачи воспользуемся законом сохранения импульса:

$$\vec{p}_\phi = \vec{p}_e + \vec{p}'_\phi.$$

Из схемы, на которой приведена векторная диаграмма импульсов фотонов (падающего и рассеянного) и электрона отдачи, видно, что для нахождения импульса электрона отдачи необходимо применить теорему косинусов:

$$\begin{aligned} p_e &= \sqrt{p_\phi^2 + p_\phi'^2 - 2p_\phi p_\phi' \cos \vartheta} = \\ &= \sqrt{(2,74 \cdot 10^{-23})^2 + (2,6 \cdot 10^{-23})^2 - 2 \cdot 2,74 \cdot 10^{-23} \cdot 2,6 \cdot 10^{-23} \cos 60^\circ} = \\ &= 2,67 \cdot 10^{-23} \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}}. \end{aligned}$$

Зная импульс электрона, найдем его скорость. Используем сначала классическое выражение для импульса $p = mv$, откуда скорость электрона

$$v = \frac{p}{m} = \frac{2,67 \cdot 10^{-23}}{9,1 \cdot 10^{-31}} = 2,93 \cdot 10^7 \text{ м/с.}$$

Как видно из полученного результата, значение скорости относится к релятивистскому интервалу, следовательно, необходимо использовать релятивистскую формулу для импульса $p_e = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{m_0 \beta c}{\sqrt{1 - \beta^2}}$.

Отсюда

$$\beta = \frac{p_e}{\sqrt{p_e^2 + (m_0 c)^2}} = \frac{2,67 \cdot 10^{-23}}{\sqrt{(2,67 \cdot 10^{-23})^2 + (9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 3 \cdot 10^8)^2}} =$$

$$= \frac{2,67 \cdot 10^{-23}}{\sqrt{7,13 \cdot 10^{-46} + 7,46 \cdot 10^{-44}}} = 0,097.$$

$$v = \beta c = 0,097c = 2,9 \cdot 10^7 \text{ м/с.}$$

Угол отдачи φ можно найти с помощью теоремы синусов:

$$\frac{p_e}{\sin \vartheta} = \frac{p'_\phi}{\sin \varphi},$$

$$\sin \varphi = \frac{p'_\phi}{p_e} \sin \vartheta = \frac{2,6 \cdot 10^{-23}}{2,67 \cdot 10^{-23}} \sin 60^\circ = 0,843,$$

$$\varphi = 57,5^\circ.$$

Угол разлета $\alpha = \vartheta + \varphi = 60^\circ + 57,5^\circ = 117,5^\circ$.

Задача 7.15

При комптоновском рассеянии энергия падающего фотона распределяется поровну между рассеянным фотоном и электроном отдачи. Угол рассеяния $\vartheta = \pi/2$. Найти энергию ε'_ϕ и импульс p'_ϕ рассеянного фотона, а также энергию ε'_e , импульс p'_e и скорость v электрона отдачи.

Решение

Используем соотношение между длинами волн падающего и рассеянного рентгеновского излучения:

$$\lambda' - \lambda = \lambda_c (1 - \cos \vartheta) = \lambda_c \left(1 - \cos \frac{\pi}{2}\right) = \lambda_c.$$

Принимая во внимание то, что $\varepsilon = \frac{hc}{\lambda}$, а, следовательно, $\lambda = \frac{hc}{\varepsilon}$, а также то, что $\lambda_c = \frac{h}{m_0 c}$, произведем замену в соотношении $\lambda' - \lambda = \lambda_c$:

$$\frac{hc}{\varepsilon'_\phi} - \frac{hc}{\varepsilon_\phi} = \frac{h}{m_0 c}.$$

Умножим и разделим правую часть уравнения на скорость света c и получим:

$$\frac{hc}{\varepsilon'_\phi} - \frac{hc}{\varepsilon_\phi} = \frac{hc}{m_0 c^2},$$

$$\frac{1}{\varepsilon'_\phi} - \frac{1}{\varepsilon_\phi} = \frac{1}{m_0 c^2}.$$

Поскольку $m_0 c^2 = \varepsilon_0$ – энергия покоя электрона, соотношение между энергиями имеет вид:

$$\frac{1}{\varepsilon'_\phi} - \frac{1}{\varepsilon_\phi} = \frac{1}{\varepsilon_0}.$$

Примем во внимание условие задачи: $\varepsilon'_\phi = \varepsilon_\phi / 2$, и тогда

$$\frac{2}{\varepsilon_\phi} - \frac{1}{\varepsilon_\phi} = \frac{1}{\varepsilon_0},$$

Откуда $\varepsilon_\phi = \varepsilon_0$ и $\varepsilon'_\phi = \varepsilon'_e = \varepsilon_0 / 2$.

Учитывая, что $\varepsilon_0 = 0,512 \text{ МэВ} = 8,18 \cdot 10^{-14} \text{ Дж}$, получим $\varepsilon'_\phi = 0,256 \text{ МэВ} = 4,09 \cdot 10^{-14} \text{ Дж}$.

Импульс рассеянного фотона

$$p'_\phi = \frac{\varepsilon'_\phi}{c} = \frac{4,09 \cdot 10^{-14}}{3 \cdot 10^8} = 1,36 \cdot 10^{-22} \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}}.$$

Импульс падающего фотона

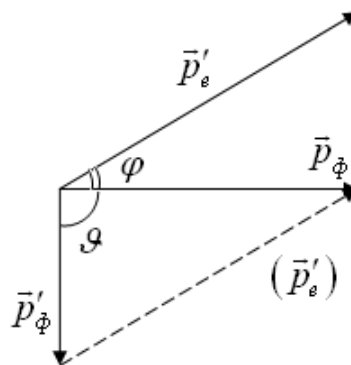
$$p_\phi = \frac{\varepsilon_\phi}{c} = \frac{8,18 \cdot 10^{-14}}{3 \cdot 10^8} = 2,72 \cdot 10^{-22} \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}}.$$

Импульс электрона отдачи можно определить из закона сохранения импульса:

$$\vec{p}_\phi = \vec{p}'_e + \vec{p}'_\phi.$$

Как видно из схемы, модуль импульса можно найти по теореме Пифагора:

$$p'_e = \sqrt{(p_\phi)^2 + (p'_\phi)^2} = \sqrt{(1,36 \cdot 10^{-22})^2 + (2,72 \cdot 10^{-22})^2} = 3 \cdot 10^{-22} \frac{\text{Кл} \cdot \text{м}}{\text{с}}$$



Скорость электрона отдачи (см. предыдущую задачу) найдем, используя релятивистскую формулу для импульса $p_e = \frac{m_0 \beta c}{\sqrt{1 - \beta^2}}$:

$$\beta = \frac{p_e}{\sqrt{p_e^2 + (m_0 c)^2}} = \frac{3 \cdot 10^{-22}}{\sqrt{(3 \cdot 10^{-22})^2 + (9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 3 \cdot 10^8)^2}} = 0,74.$$

Таким образом, скорость электрона

$$v = \beta c = 0,74c = 2,2 \cdot 10^8 \text{ м/с}.$$

Задача 7.16

Чему равны энергия рассеянного фотона и электрона отдачи при эффекте Комптона, если падающий фотон претерпел рассеяние на угол $\vartheta = 180^\circ$? Энергия фотона до рассеяния равна $\varepsilon_\phi = 1,536 \text{ МэВ}$. Найти импульсы падающего и рассеянного фотонов, а также скорость и импульс электрона отдачи.

Решение

Из соотношения между длинами волн для Комpton-эффекта

$$\lambda' - \lambda = \lambda_c (1 - \cos \vartheta) = \lambda_c (1 - \cos \pi) = 2\lambda_c.$$

Используя то, что длина волны фотона связана с его энергией по формуле $\lambda = \frac{hc}{\varepsilon}$, а также то, что комптоновская длина волны электрона

$\lambda_c = \frac{h}{m_0 c}$, произведем замену в соотношении $\lambda' - \lambda = 2\lambda_c$:

$$\frac{hc}{\varepsilon'_\phi} - \frac{hc}{\varepsilon_\phi} = \frac{2h}{m_0 c}$$

Умножим и разделим правую часть уравнения на скорость света c и получим:

$$\frac{hc}{\varepsilon'_\phi} - \frac{hc}{\varepsilon_\phi} = \frac{2hc}{m_0 c^2},$$

$$\frac{1}{\varepsilon'_\phi} - \frac{1}{\varepsilon_\phi} = \frac{2}{m_0 c^2}.$$

Энергия покоя электрона $m_0 c^2 = \varepsilon_0 = 0,512$ МэВ, тогда энергия падающего фотона $\varepsilon_\phi = 1,536$ МэВ $= 3\varepsilon_0$. С учетом этого запишем последнее уравнение в виде

$$\frac{1}{\varepsilon'_\phi} - \frac{1}{3\varepsilon_0} = \frac{2}{\varepsilon_0}.$$

Отсюда

$$\frac{1}{\varepsilon'_\phi} = \frac{1}{3\varepsilon_0} + \frac{2}{\varepsilon_0} = \frac{7}{3\varepsilon_0},$$

$$\varepsilon'_\phi = \frac{3}{7}\varepsilon_0 = \frac{3 \cdot 0,512}{7} = 0,219 \text{ МэВ} = 3,52 \cdot 10^{-14} \text{ Дж.}$$

Из закона сохранения энергии $\varepsilon_\phi = \varepsilon'_\phi + \varepsilon'_e$:

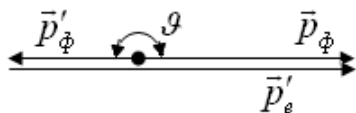
$$\begin{aligned} \varepsilon'_e &= \varepsilon_\phi - \varepsilon'_\phi = 3\varepsilon_0 - 0,219\varepsilon_0 = 2,781\varepsilon_0 = 2,781 \cdot 0,512 \text{ МэВ} = \\ &= 1,43 \text{ МэВ} = 2,28 \cdot 10^{-13} \text{ Дж.} \end{aligned}$$

Импульсы падающего и рассеянного фотонов равны

$$p_\phi = \frac{\varepsilon_\phi}{c} = \frac{3 \cdot \varepsilon_0}{c} = \frac{3 \cdot m_0 c^2}{c} = 3 \cdot m_0 c = 3 \cdot 2,731 \cdot 10^{-22} = 8,193 \cdot 10^{-22} \frac{\text{КГ} \cdot \text{М}}{\text{с}},$$

$$p'_{\phi} = \frac{\varepsilon'_{\phi}}{c} = \frac{2,781 \cdot \varepsilon_0}{c} = 2,781 \frac{m_0 c^2}{c} = 2,781 \cdot m_0 c =$$

$$= 2,781 \cdot 2,731 \cdot 10^{-22} = 7,59 \cdot 10^{-22} \frac{\text{КГ} \cdot \text{М}}{\text{с}}.$$



Для нахождения импульса электрона отдачи воспользуемся законом сохранения импульса $\vec{p}_{\phi} = \vec{p}'_e + \vec{p}'_{\phi}$ и векторной диаграммой импульсов. Модуль импульса электрона

$$p'_e = p_{\phi} + p'_{\phi} = 2,72 \cdot 10^{-22} + 7,59 \cdot 10^{-22} = 1,03 \cdot 10^{-21} \frac{\text{КГ} \cdot \text{М}}{\text{с}}.$$

Скорость электрона отдачи найдем, используя релятивистскую формулу для импульса $p_e = \frac{m_0 \beta c}{\sqrt{1 - \beta^2}}$, из которой

$$\beta = \frac{p_e}{\sqrt{p_e^2 + (m_0 c)^2}} = \frac{1,03 \cdot 10^{-21}}{\sqrt{(1,03 \cdot 10^{-21})^2 + (9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 3 \cdot 10^8)^2}} = 0,967.$$

Таким образом, скорость электрона составляет

$$v = \beta c = 0,967c = 2,9 \cdot 10^8 \text{ м/с}.$$

Задача 7.17

При Комpton-эффекте длины волн фотонов, рассеянных под углами $\vartheta_1 = 60^\circ$ и $\vartheta_2 = 120^\circ$, отличаются друг от друга в 2 раза. Найти длину волны λ падающего рентгеновского излучения.

Решение

Запишем соотношения между длинами волн падающего и рассеянного фотонов при Комpton-эффекте для двух углов рассеяния:

$$\begin{cases} \lambda'_1 - \lambda = \lambda_c (1 - \cos \vartheta_1) = \lambda_c (1 - \cos 60^\circ) = \frac{\lambda_c}{2}, \\ \lambda'_2 - \lambda = \lambda_c (1 - \cos \vartheta_2) = \lambda_c (1 - \cos 120^\circ) = \frac{3\lambda_c}{2}. \end{cases}$$

Длина волны λ'_2 рассеянного рентгеновского излучения для второго случая больше, чем длина волны λ'_1 в первом случае, следовательно, $\lambda'_2 = 2\lambda'_1$. Тогда

$$\begin{cases} \lambda'_1 - \lambda = \frac{\lambda_c}{2}, \\ 2\lambda'_1 - \lambda = \frac{3\lambda_c}{2}. \end{cases}$$

Выразив из первого уравнения $\lambda'_1 = \lambda + \frac{\lambda_c}{2}$ и подставив его во второе, получим

$$2\left(\lambda + \frac{\lambda_c}{2}\right) - \lambda = \frac{3\lambda_c}{2}.$$

Учитывая, что комптоновская длина волны электрона $\lambda_c = 2,43 \cdot 10^{-12} \text{ м} = 2,43 \text{ пм}$, получим

$$\lambda = 0,5\lambda_c = 0,5 \cdot 2,43 = 1,215 \text{ пм}.$$

Задача 7.18

Фотон с энергией $\varepsilon_\phi = 0,15 \text{ МэВ}$ рассеялся на покоившемся свободном электроны, в результате чего его длина волны изменилась на $\Delta\lambda = 3 \text{ пм}$. Найти угол, под которым вылетит комптоновский электрон.

Решение

Воспользуемся соотношением между длинами волн падающего и рассеянного фотонов при эффекте Комптона в виде

$$\Delta\lambda = 2\lambda_c \sin^2\left(\frac{\vartheta}{2}\right).$$

Учитывая, что комптоновская длина волны электрона $\lambda_c = 2,43 \text{ пм}$, выразим $\sin^2\left(\frac{\vartheta}{2}\right) = \frac{\Delta\lambda}{2\lambda_c} = \frac{3}{2 \cdot 2,43} = 0,617$, откуда угол рассеяния $\vartheta = 103,6^\circ$.

Зная энергию падающего фотона ε_ϕ , можно найти его длину волны и импульс, приняв во внимание, что $\varepsilon_\phi = 0,15 \text{ МэВ} = 0,15 \cdot 10^6 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}$.

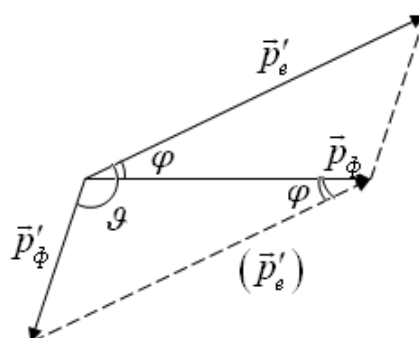
$$\lambda = \frac{hc}{\varepsilon_\phi} = \frac{6,62 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{0,15 \cdot 10^6 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}} = 8,27 \cdot 10^{-12} \text{ м} = 8,27 \text{ пм},$$

$$p_\phi = \frac{\varepsilon_\phi}{c} = \frac{0,15 \cdot 10^6 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}}{3 \cdot 10^8} = 8 \cdot 10^{-23} \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}}.$$

Поскольку $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda$, то длина волны и импульс рассеянного фотона равны, соответственно,

$$\lambda' = \Delta\lambda + \lambda = 3 + 2,43 = 5,43 \text{ пм} = 5,43 \cdot 10^{-12} \text{ м},$$

$$p'_\phi = \frac{h}{\lambda'} = \frac{6,62 \cdot 10^{-34}}{5,43 \cdot 10^{-12}} = 1,22 \cdot 10^{-22} \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}}.$$



Для нахождения импульса электрона отдачи воспользуемся законом сохранения импульса:

$$\vec{p}_\phi = \vec{p}_e + \vec{p}'_\phi.$$

Из векторной диаграммы импульсов фотонов (падающего и рассеянного) и электрона отдачи, видно, что для нахождения импульса электрона отдачи необходимо применить теорему косинусов:

$$\begin{aligned} p_e &= \sqrt{p_\phi^2 + p'^2_\phi - 2p_\phi p'_\phi \cos \theta} = \\ &= \sqrt{(8 \cdot 10^{-23})^2 + (1,22 \cdot 10^{-22})^2 - 2 \cdot 8 \cdot 10^{-23} \cdot 1,22 \cdot 10^{-22} \cos 103,6^\circ} = \\ &= 1,61 \cdot 10^{-22} \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}}. \end{aligned}$$

Для нахождения угла отдачи φ используем теорему синусов

$$\frac{p_e}{\sin \theta} = \frac{p'_\phi}{\sin \varphi},$$

$$\sin \varphi = \frac{p'_\phi}{p_e} \sin \vartheta = \frac{1,22 \cdot 10^{-22}}{1,61 \cdot 10^{-22}} \sin 103,6^\circ = 0,737,$$

$$\varphi = 47,43^\circ.$$

Задача 7.19

Угол рассеяния фотона равен 60° , а угол разлета 90° . Определить энергию падающего фотона, энергию рассеянного фотона, энергию, импульс и скорость электрона отдачи.

Решение

Соотношение между длинами волн падающего и рассеянного фотонов при Комpton-эффекте $\lambda' - \lambda = \lambda_c (1 - \cos \vartheta) = \lambda_c (1 - \cos 60^\circ) = \frac{\lambda_c}{2}$. Учитывая, что длина волны фотона связана с его энергией по формуле $\lambda = \frac{hc}{\varepsilon}$, а также то, что комптоновская длина волны электрона $\lambda_c = \frac{h}{m_0 c}$, получим

$$\frac{hc}{\varepsilon'_\phi} - \frac{hc}{\varepsilon_\phi} = \frac{h}{2m_0 c}.$$

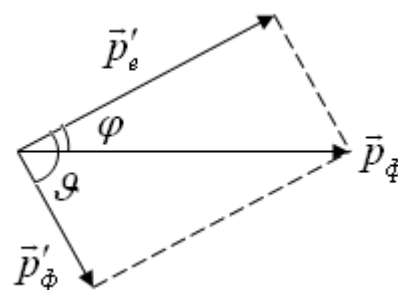
Умножим и разделим правую часть уравнения на скорость света c .

$$\frac{hc}{\varepsilon'_\phi} - \frac{hc}{\varepsilon_\phi} = \frac{hc}{2m_0 c^2},$$

$$\frac{1}{\varepsilon'_\phi} - \frac{1}{\varepsilon_\phi} = \frac{1}{2\varepsilon_0}.$$

Для нахождения соотношения между энергиями падающего ε_ϕ и рассеянного ε'_ϕ

фотонов используем соотношение между импульсами этих фотонов, полученное из закона сохранения импульса для Комpton-эффекта: $\vec{p}_\phi = \vec{p}_e + \vec{p}'_\phi$. Из треугольника импульсов, с учетом того, что угол разлета $\alpha = \vartheta + \varphi = 90^\circ$, а угол рассеяния $\vartheta = 60^\circ$, найдем угол отдачи $\varphi = 30^\circ$.



Если $\vartheta = 60^\circ$, то $\cos \vartheta = \cos 60^\circ = 0,5$; с другой стороны, $\cos \vartheta = \frac{p'_\phi}{p_\phi}$. По-

этому $\frac{p'_\phi}{p_\phi} = 0,5$ и $p_\phi = 2p'_\phi$. Учитывая, что $p_\phi = \frac{\varepsilon_\phi}{c}$ и $p'_\phi = \frac{\varepsilon'_\phi}{c}$, получим

соотношение между энергиями $\frac{\varepsilon_\phi}{c} = 2 \frac{\varepsilon'_\phi}{c}$, откуда $\varepsilon_\phi = 2\varepsilon'_\phi$.

Тогда

$$\frac{1}{\varepsilon'_\phi} - \frac{1}{2\varepsilon'_\phi} = \frac{1}{2\varepsilon_0}.$$

Энергия рассеянного фотона равна

$$\varepsilon'_\phi = \varepsilon_0 = 0,512 \text{ МэВ} = 8,19 \cdot 10^{-14} \text{ Дж},$$

а энергия падающего фотона

$$\varepsilon_\phi = 2\varepsilon_0 = 2 \cdot 0,512 = 1,024 \text{ МэВ} = 1,64 \cdot 10^{-13} \text{ Дж}.$$

Энергию электрона определим из закона сохранения энергии $\varepsilon_\phi = \varepsilon'_\phi + \varepsilon'_e$.

$$\varepsilon'_e = \varepsilon_\phi - \varepsilon'_\phi = 2\varepsilon_0 - \varepsilon_0 = \varepsilon_0.$$

Импульсы падающего и рассеянного фотонов, соответственно, равны

$$p_\phi = \frac{\varepsilon_\phi}{c} = \frac{2 \cdot \varepsilon_0}{c} = \frac{2 \cdot m_0 c^2}{c} = 2 \cdot m_0 c = 2 \cdot 2,731 \cdot 10^{-22} = 5,462 \cdot 10^{-22} \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}},$$

$$p'_\phi = \frac{\varepsilon'_\phi}{c} = \frac{\varepsilon_0}{c} = \frac{m_0 c^2}{c} = m_0 c = 2,731 \cdot 10^{-22} \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}}.$$

Импульс электрона отдачи

$$p'_e = \sqrt{(p_\phi)^2 + (p'_\phi)^2} = \sqrt{(2m_0 c)^2 + (m_0 c)^2} = \sqrt{3} m_0 c = 4,72 \cdot 10^{-22} \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}}.$$

Скорость электрона отдачи найдем, используя релятивистскую формулу

для импульса $p_e = \frac{m_0 \beta c}{\sqrt{1 - \beta^2}}$, из которой

$$\beta = \frac{p_e}{\sqrt{p_e^2 + (m_0 c)^2}} = \frac{\sqrt{3} m_0 c}{\sqrt{(\sqrt{3} m_0 c)^2 + (m_0 c)^2}} = \frac{\sqrt{3} m_0 c}{2 m_0 c} = 0,866.$$

Таким образом, скорость электрона отдачи

$$v = \beta c = 0,866c = 2,6 \cdot 10^8 \text{ м/с}.$$

Задача 7.20

Фотон, начальная длина волны которого $\lambda = 0,04$ нм испытывает два последовательных столкновения с двумя электронами. Угол рассеяния при первом взаимодействии равен 90° , а при втором – 60° . Найти конечную длину волны фотона.

Решение

Из соотношения между длинами волн падающего и рассеянного фотонов при первом Комптон-эффекте определим длину волны рассеянного фотона

$$\lambda' - \lambda = \lambda_c (1 - \cos \vartheta) = \lambda_c (1 - \cos 90^\circ) = \lambda_c.$$

Отсюда $\lambda' = \lambda + \lambda_c$.

Этот рассеянный фотон во втором комптоновском рассеянии играет роль падающего фотона, поэтому

$$\lambda'_1 - (\lambda + \lambda_c) = \lambda_c (1 - \cos 60^\circ) = \frac{\lambda_c}{2}.$$

Окончательно, учитывая, что $\lambda = 0,04 \text{ нм} = 40 \text{ пм}$,

$$\lambda'_1 = \lambda + \lambda_c + \frac{\lambda_c}{2} = \lambda + 1,5 \lambda_c = 40 + 1,5 \cdot 2,43 = 43,6 \text{ пм}.$$

III. КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

К7.1. Определить красную границу фотоэффекта для цинка и максимальную скорость фотоэлектронов, вырываемых с его поверхности электромагнитным излучением с длиной волны 250 нм.

$$\left[\lambda_{cp} = 332 \text{ нм}; v_{\max} = 6,6 \cdot 10^5 \text{ м/с} \right]$$

К7.2. Фототок, возникающий в цепи вакуумного фотоэлемента при освещении электрода электромагнитным излучением с длиной волны $\lambda = 262$ нм, прекращается, если подключить внешнее задерживающее напряжение $U = 1,5$ В. Найти работу выхода из металла электрода в Джоулях и электрон-вольтах. $\left[A_{\text{вых}} = 5,2 \cdot 10^{-19} \text{ Дж} = 3,24 \text{ эВ} \right]$

К7.3. Красная граница фотоэффекта для цезия соответствует длине волны 653 нм. Определить максимальную скорость вылетевшего электрона при освещении цезия светом с длиной волны 400 нм. $\left[v_{\max} = 6,5 \cdot 10^5 \text{ м/с} \right]$

К7.4. При увеличении напряжения на рентгеновской трубке в 15 раз длина волны коротковолновой границы сплошного рентгеновского спектра изменилась на $\Delta\lambda = 26$ пм. Определить первоначальное напряжение на рентгеновской трубке. $\left[U_1 = hc/e \cdot \Delta\lambda = 47,8 \text{ кВ} \right]$

К7.5. Определить длину волны коротковолновой границы сплошного рентгеновского спектра, если скорость электронов, которые бомбардируют

антикатод трубки равна $v = 0,85c$.
$$\left[\lambda = \frac{hc}{m_0 c^2 \left[\left(1/\sqrt{1-\beta^2} \right) - 1 \right]} = 2,72 \cdot 10^{-12} \text{ м} \right]$$

К7.6. На каждый квадратный сантиметр поверхности падает лучистый поток мощностью $N = 1$ мкВт. Определить давление P света, если коэффициент отражения $\rho = 0,8$. Поверхность перпендикулярна лучам. $\left[P = 6 \cdot 10^{-11} \text{ Па} \right]$

К7.7. Вычислить световое давление P на идеальную зеркальную поверхность, площадь которой составляет $S = 10 \text{ см}^2$, если на неё падает

лучистый поток $N = 0,9$ Вт. Поверхность перпендикулярна лучам.
[$P = 6 \cdot 10^{-6}$ Па]

К7.8. Фотон с длиной волны $\lambda = 6$ пм рассеялся под прямым углом на покоившемся свободном электроне. Найти частоту рассеянного фотона и кинетическую энергию электрона отдачи. [$\nu' = 2,2 \cdot 10^{20}$ с $^{-1}$, $\varepsilon'_e = 60$ кэВ]

К7.9. Фотон рассеялся под углом $\vartheta = 120^\circ$ на покоившемся свободном электроне, в результате чего электрон получил кинетическую энергию $\varepsilon'_e = 0,45$ МэВ. Найти энергию фотона до рассеяния. [$\varepsilon_\phi = 0,68$ МэВ]

К7.10. Фотон с энергией 1 МэВ рассеялся на покоившемся свободном электроне. Найти кинетическую энергию электрона отдачи, если в результате рассеяния длина волны фотона изменилась на 25 %. [$\varepsilon'_e = 0,2$ МэВ]

К7.11. Фотон с энергией 0,15 МэВ рассеялся на покоившемся электроне, в результате чего его длина волны изменилась на $\Delta\lambda = 0,3$. Найти угол отдачи электрона. [$\varphi = 71,6^\circ$]

ОСНОВЫ АТОМНОЙ И ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ

Глава 8.

БОРОВСКАЯ ТЕОРИЯ СТРОЕНИЯ АТОМА ВОДОРОДА И ВОДОРОДОПОДОБНЫХ ИОНОВ

I. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

1. Опыты Резерфорда по рассеянию α -частиц веществом

Гипотеза о том, что все вещества состоят из мельчайших элементарных частиц, возникла еще в древней Греции. Философ Демокрит назвал частицы атомами (др. греч. $\alpha\tau\omicron\mu\omicron\varsigma$ – неделимый). Такое представление об атомах сохранялось на протяжении веков, и вопрос о строении атомов даже не возникал. В 1897 г. английский физик Джозеф Томсон (1856–1940), лауреат Нобелевской премии по физике 1906 г. (рис. 8.1, а), изучая катодные лучи, пришел к выводу, что атомы любого вещества содержат отрицательно заряженные частицы, которые он назвал *электронами*. Огромной заслугой Томсона явилось доказательство того, что все частицы, образующие катодные лучи, тождественны друг другу и входят в состав вещества.

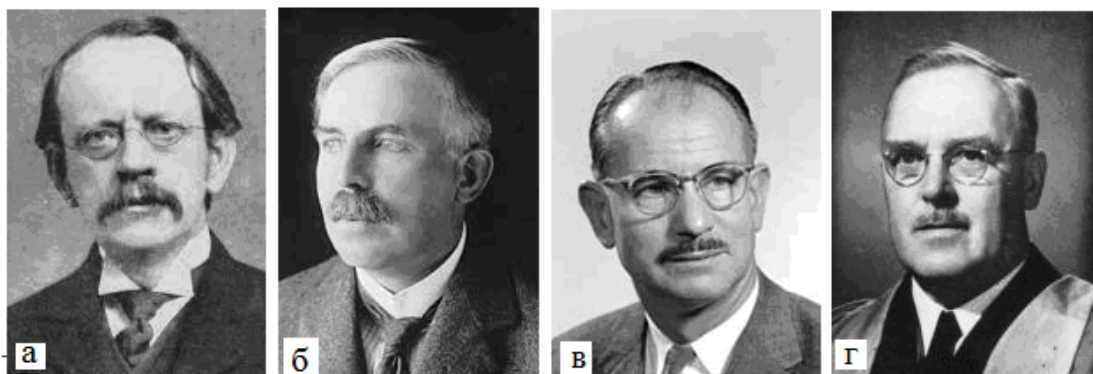


Рисунок 8.1 – Дж.Томсон (а), Э.Резерфорд (б), Х.Гейгер (в), Э.Марсден (г)

Томсон в 1904 г. предложил первую модель атома, представив атом как сгусток материи, обладающий положительным электрическим зарядом, в который вкраплено столько электронов, что превращает его в электрически нейтральное образование. Томсоновская модель получила название «булочка с изюмом» (или в английском варианте plum pudding – сливовый

пудинг), поскольку в соответствии с ней отрицательно заряженные электроны были подобно изюму в булочке распределены в положительно заряженной сфере.

Модель Томсона была опровергнута английским физиком, лауреатом Нобелевской премии по химии 1908 г. Эрнестом Резерфордом (1871–1937), который в 1908 г. со своими учениками с Хансом Гейгером (1882–1945) и Эрнестом Марсденом (1889–1970) (рис. 8.1, б, в, г) изучал прохождение α -частиц через тонкую фольгу из золота и других металлов. Опыты (рис. 8.2) показали, что некоторая часть α -частиц рассеивается на значительные (более 90°) углы, что невозможно было объяснить в рамках модели Томсона. Анализ результатов экспериментов по рассеянию α -частиц позволил Резерфорду предложить так называемую «планетарную» модель атома, согласно которой положительный заряд сконцентрирован в очень малой ($\sim 10^{-14}$ м) области, а отрицательный заряд находится вокруг ядра, занимая область $\sim 10^{-10}$ м. Положительный заряд $(+Ze)$ равен по модулю отрицательному $(-Ze)$, где число Z – номер элемента в таблице Менделеева.

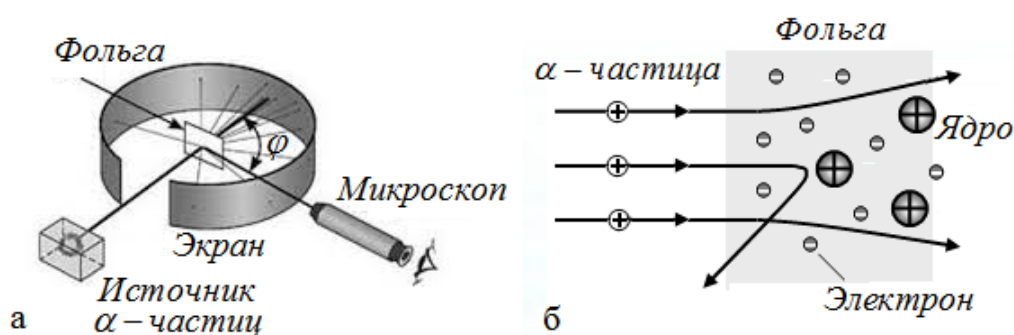


Рисунок 8.2 – Опыт Резерфорда по рассеянию α -частиц (а), схема опыта (б)

Недостатком ядерной модели Резерфорда явилось следующее: поскольку система неподвижных зарядов не может быть устойчивой, то Резерфорд предположил, что электроны движутся по искривленным траекториям. Но в этом случае движение является ускоренным (есть нормальное ускорение), а, значит, должны излучаться электромагнитные волны, следовательно, должна теряться энергия, в результате чего электроны должны упасть на ядро. Выход из этой ситуации предложил Бор.

2. Постулаты Бора

Датский физик, лауреат Нобелевской премии 1922 г. Нильс Бор (1885–1962) (рис. 8.3, *а*) в 1913 г., полагая, что в микромире не могут действовать те же законы, что в макромире, сформулировал предположения (постулаты), которые противоречили положениям классической физики.



Рисунок 8.3 – Н. Бор (*а*), Дж.Франк (*б*), Г.Герц (*в*)

1. Постулат стационарных состояний: существуют некоторые *стационарные состояния* атома, находясь в которых, он не излучает энергии. Этим состояниям соответствуют *стационарные орбиты*, двигаясь по которым с ускорением, электроны не излучают ЭМ волны. При этом должно выполняться **правило квантования орбит**: в стационарном состоянии атома электрон, двигаясь по круговой орбите, должен иметь квантованные (определенные) значения момента импульса, удовлетворяющие условию

$$L = mvr = n\hbar, \quad (8.1)$$

где $n = 1, 2, 3, \dots$ – главное квантовое число.

Иногда правило квантования орбит формулируют как отдельный постулат.

2. Правило частот: при переходе атома из одного стационарного состояния в другой испускается или поглощается один фотон с энергией

$$\hbar\omega = E_{n_1} - E_{n_2}, \quad (8.2)$$

где n_1, n_2 – номера состояний.

При поглощении света атом переходит из стационарного состояния с меньшей энергией в стационарное состояние с большей энергией; при излучении – из стационарного с большей энергией в стационарное состоя-

ние с меньшей энергией, т.е. при $E_{n1} > E_{n2}$ происходит излучение фотона, а при $E_{n1} < E_{n2}$ – поглощение фотона.

3. Опыт Франка-Герца

Теория Бора о дискретности энергетических уровней подтверждена в 1914 г. опытами двух ученых – немецко-американского физика Джеймса Франка (1882–1964) и немецкого – Густава Герца (1887–1975) (рис. 8.3, б, в), получивших за свои работы, в которых изучались столкновения электронов с атомами газов (паров ртути) методом задерживающего потенциала, Нобелевскую премию по физике 1925 г.

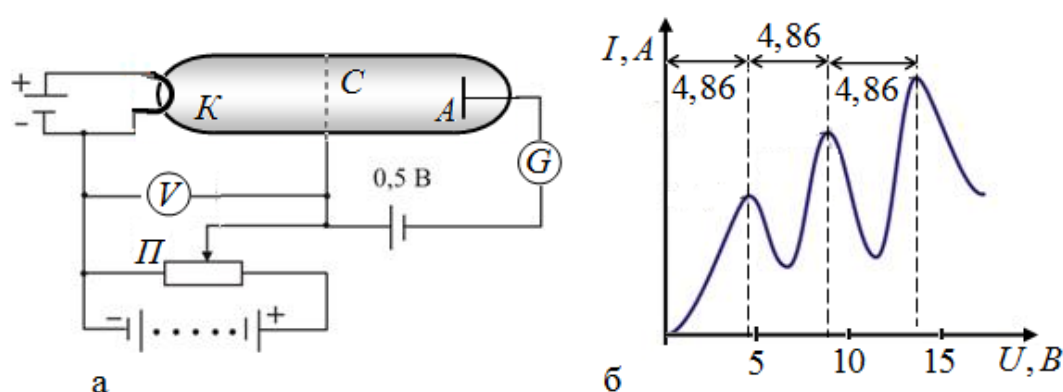


Рисунок 8.4 – Опыт Франка-Герца (а), вольт-амперная характеристика (б)

Идея опытов заключается в следующем (рис. 8.4, а): атомы и молекулы разреженного газа «обстреливают» медленными электронами и при этом исследуют распределение скоростей электронов до и после столкновения. Если столкновения упругие, то распределение скоростей не меняется. При неупругих столкновениях электрон теряет энергию, отдавая ее атомам, в результате чего меняется распределение по скоростям.

Опыт показал, что **электроны передают свою энергию атомам ртути порциями** (рис. 8.4, б), причем 4,86 эВ – наименьшая возможная порция, которая может быть поглощена атомом ртути в основном энергетическом состоянии ($n = 1$). Следовательно, идея Бора о существовании в атомах стационарных состояний блестяще выдержала проверку экспериментом.

Атомы ртути, получившие при соударении с электронами энергию $\Delta E = 4,86$ эВ, переходят в возбужденное состояние и должны вернуться в основное, излучая при этом, согласно второму постулату Бора, квант света

с частотой $\nu = \Delta E/h$. По известному значению можно вычислить длину волны светового кванта: $\lambda = hc/\Delta E \approx 255$ нм. Таким образом, если теория верна, то атомы ртути, бомбардируемые электронами с энергией 4,86 эВ, должны являться источником ультрафиолетового излучения с $\lambda \approx 255$ нм, что действительно обнаружилось в опытах.

Таким образом, опыты Франка и Герца экспериментально подтвердили не только первый, но и второй постулат Бора и внесли значительный вклад в развитие атомной физики.

4. Боровская теория атома водорода. Спектр водорода. Формула Ридберга

На основе своих постулатов Бор создал теорию построения атома водорода. Водород является самым простым химическим элементом: его ядро содержит один протон с зарядом $+e$, а вокруг ядра вращается электрон с зарядом $-e$ ($e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл – элементарный заряд). Электрон притягивается к ядру за счет электростатических кулоновских сил взаимодействия. Тогда по классическому II закону Ньютона:

$$m \frac{v^2}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{e^2}{r^2}. \quad (8.3)$$

Возведем в квадрат II постулат Бора $mvr = n\hbar$ и разделим на него выражение (8.3)

$$\frac{mv^2}{rm^2v^2r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{e^2}{r^2n^2\hbar^2},$$

Радиус n -ой боровской орбиты электрона

$$r_n = 4\pi\epsilon_0 \frac{\hbar^2}{me^2} n^2, \quad (8.4)$$

где $n = 1, 2, 3, \dots$ – номер орбиты (уровня, состояния) или **главное квантовое число**.

Радиус первой боровской орбиты атома водорода (при $n=1$) – **первый боровский радиус**:

$$r_1 = 0,53 \cdot 10^{-10} \text{ м}. \quad (8.5)$$

Скорость электрона на n -ой орбите из II постулата Бора с учетом (8.4) равна

$$v_n = \frac{\hbar}{m \cdot r_n} \cdot n = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \cdot \hbar} \cdot \frac{1}{n} = \frac{v_1}{n} = \frac{2,19 \cdot 10^6}{n} \text{ м/с}, \quad (8.6)$$

где v_1 – **скорость электрона на первой боровской орбите** равная

$$v_1 = 2,19 \cdot 10^6 \text{ м/с}. \quad (8.7)$$

Энергия атома водорода согласно теории Бора складывается из кинетической (T) энергии электрона (ядро неподвижно) и потенциальной (Π) энергии взаимодействия электрона с ядром:

$$E = T + \Pi = \frac{mv^2}{2} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{e^2}{r}. \quad (8.8)$$

Из (8.3) $mv^2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{e^2}{r}$. Тогда

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{e^2}{2r} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{e^2}{r} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{e^2}{2r}. \quad (8.9)$$

Подставим в (8.9) выражение (8.4) для боровского радиуса и получим выражение для **полной энергии** электрона в атоме водорода:

$$E_n = -\frac{1}{(4\pi\epsilon_0)^2} \cdot \frac{me^4}{2\hbar^2} \cdot \frac{1}{n^2} = -\frac{E_1}{n^2} = -\frac{13,6}{n^2} \text{ эВ}. \quad (8.10)$$

Значения **полной**, **кинетической** и **потенциальной** энергии связаны следующими соотношениями:

$$E_n = -T_n, \quad \Pi_n = 2E_n = -2T_n. \quad (8.11)$$

Энергетические уровни водорода E_n можно представить графически в виде диаграммы (рис. 8.5). На вертикальной оси указаны значения энергии электрона на различных энергетических уровнях, рассчитанные по формуле (8.11), и показаны переходы между уровнями, объединенные в так называемые спектральные серии.

На основании правила частот ($\hbar\omega = E_{ni} - E_{nk}$) можно рассчитать частоты и длины волн спектральных линий:

$$\omega = \frac{E_{ni} - E_{nk}}{\hbar} = \frac{1}{(4\pi\epsilon_0)^2} \cdot \frac{me^4}{2\hbar^3} \left(\frac{1}{n_i^2} - \frac{1}{n_k^2} \right) = R' \left(\frac{1}{n_i^2} - \frac{1}{n_k^2} \right), \quad (8.12)$$

где $R' = 2,07 \cdot 10^{16} \text{ с}^{-1}$ – постоянная Ридберга (для частот).

$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{n_i^2} - \frac{1}{n_k^2} \right), \quad (8.13)$$

где $R = 1,1 \cdot 10^7 \text{ м}^{-1}$ – постоянная Ридберга (для длин волн).

Формулы (8.12) и (8.13) носят название **формул Ридберга для частот и длин волн**, соответственно, в честь предложившего их в 1890 г. шведского физика Йоханнеса Ридберга (1854–1919) (рис. 8.6, а).

Энергия кванта, излучаемого при переходе электрона с более высокого на более низкий уровень, равна

$$\varepsilon = \frac{hc}{\lambda} = hcR \left(\frac{1}{n_i^2} - \frac{1}{n_k^2} \right). \quad (8.14)$$

Состояние атома с наименьшей энергией $E_1 = -13,6 \text{ эВ}$ ($n=1$) – **основное**. Энергия $E = 13,6 \text{ эВ}$ является **энергией связи** электрона в основном состоянии. Именно эту энергию надо сообщить электрону в основном состоянии, чтобы удалить его из атома водорода. Поэтому ее также называют **энергией ионизации** атома. **Потенциал ионизации** – та разность потенциалов, которую должен пройти электрон, чтобы, столкнувшись с невозбужденным атомом, ионизировать его.

Состояния с $n = 2, 3, \dots$ – **возбужденные**. По аналогии с потенциалом и энергией ионизации вводятся понятия **энергии возбуждения** и **потенциала возбуждения**.

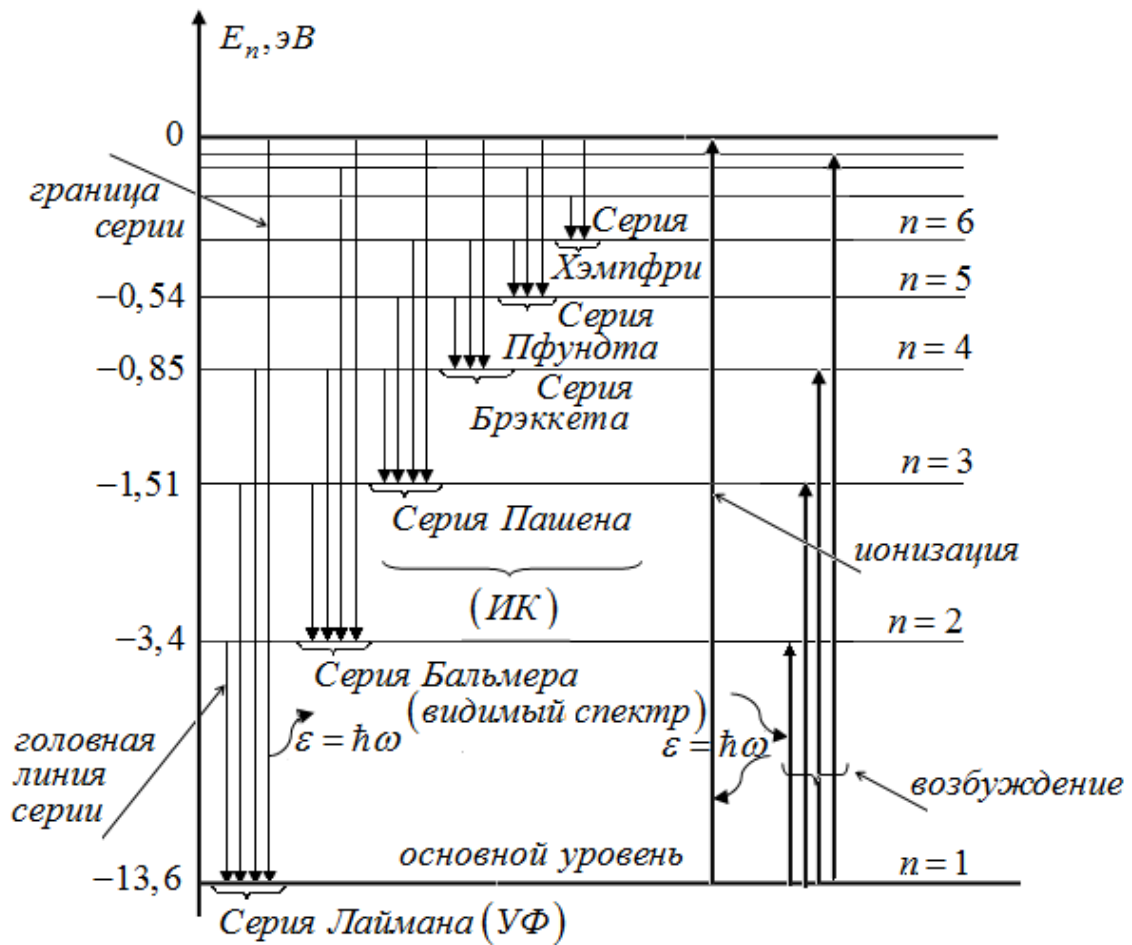


Рисунок 8.5 – Схема энергетических уровней атома водорода

Спектральная серия возникает при квантовых переходах электронов с различных возбужденных уровней энергии на один и тот же конечный уровень.

Головная линия серии имеет наибольшую в данной серии длину волны. Например, для серии Лаймана длина волны головной линии соответствует переходу между вторым и первым уровнями, т. е. $n_i = 1$, $n_k = 2$, и определяется выражением

$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{n_i^2} - \frac{1}{n_k^2} \right) = R \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} \right) = \frac{3R}{4}, \quad (8.15)$$

откуда $\lambda = \lambda_{\max} = \frac{4}{3R} = 121,6$ нм.

Эта линия также называется **резонансной линией водорода**.

Граница серии ($n_k = \infty$) – соответствует частоте $\omega_{ep} = \frac{R'}{n_1^2}$ или длине

волны $\lambda_{ep} = \frac{n_i^2}{R}$.

Серия Лаймана образуется при переходе электронов с возбужденных энергетических уровней на первый в спектре излучения и с первого уровня на все остальные в спектре поглощения, т. е. в формуле Ридберга ($n_i = 1$, а $n_k = 2, 3, \dots, \infty$) и относится к ультрафиолетовому диапазону. Серия названа в честь американского физика Теодора Лаймана (1874–1954) (рис. 8.6, б), открывшего ее в 1906 г.

Серия Бальмера образуется при переходах электронов с $n_k > 2$ на второй уровень $n_i = 2$. Первые пять линий ($n_k = 3, 4, 5, 6, 7$) этой серии в спектре водорода соответствуют видимому диапазону, остальные – ультрафиолетовому. Серия названа в честь швейцарского математика и физика Иоганна Бальмера (1825–1898) (рис. 8.6, в), описавшего эту серию формулой

$$\lambda = b \frac{n^2}{n^2 - 2^2},$$

где $n = 3, 4, 5, \dots$, а $b = 3,6456 \cdot 10^{-7}$ м.



Рисунок 8.6 – Йоханнес Ридберг (а), Теодор Лайман (б), Иоганн Бальмер (в)

Это формула, которую называют **формулой Бальмера**, является частным случаем формулы Ридберга для $n_i = 2$, а $n_k = 3, 4, 5, \dots$

$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{n_i^2} - \frac{1}{n_k^2} \right) = R \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n_k^2} \right). \quad (8.16)$$

Серия Пашена была названа в честь открывшего ее в 1908 г. австрийского физика Ф. Пашена (1865–1947). Она образуется при переходах электронов на третий уровень ($n_i = 3$) с уровней $n_k = 4, 5, \dots, \infty$ и соответствует инфракрасному диапазону.

Переходам электронов на четвертый ($n_i = 4$) уровень с уровней $n_k = 5, 6, \dots, \infty$ отвечает **серия Брэккета**, переходам на пятый уровень с уровней $n_k = 6, 7, \dots, \infty$ – **серия Пфунда**, переходам на шестой уровень ($n_i = 6$) с уровней $n_k = 7, 8, \dots, \infty$ – **серия Хэмфри**, названные в честь американских физиков открывших их в 1922, 1924 и 1953 гг., соответственно. Все эти серии также принадлежат у инфракрасному диапазону.

Экспериментальные исследования спектров излучения разреженных газов (т. е. спектров излучения отдельных атомов) показали, что каждому газу присущ определенный линейчатый спектр, состоящий из отдельных спектральных линий или групп близко расположенных линий. Формула Ридберга для серии Бальмера полностью описывает видимый спектр водорода и, как было выяснено позднее, и спектры в УФ и ИК диапазонах.

Прекрасное согласие боровской теории атома водорода с экспериментом служило веским аргументом в пользу ее справедливости. Однако попытки применить эту теорию к более сложным атомам не увенчались успехом. Однако, теория Бора хорошо подходит для описания так называемых водородоподобных атомов (точнее, ионов), т. е. атомов, у которых остался один электрон, а все остальные электроны отсутствуют вследствие ионизации этого атома.

Для водородоподобного атома (иона с зарядом ядра $+Ze$ и одним электроном) частоты спектральных линий, испускаемых или поглощаемых атомом при переходе электрона с уровня на уровень

$$\omega = Z^2 R' \left(\frac{1}{n_i^2} - \frac{1}{n_k^2} \right). \quad (8.17)$$

Для длин волн спектральных линий с учетом того, что $\omega = \frac{2\pi c}{\lambda}$ имеем

$$\frac{1}{\lambda} = Z^2 R \left(\frac{1}{n_i^2} - \frac{1}{n_k^2} \right). \quad (8.18)$$

Достоинства теории Бора как крупного шага в развитии теории строения атома в том, что она:

- 1) показала неприменимость законов классической физики к описанию внутриатомных явлений;
- 2) объяснила дискретное строение спектров газов (водорода и водородоподобных атомов);
- 3) стимулировала постановку многих экспериментов, давших важные результаты.

Недостатки теории Бора:

- 1) явилась непоследовательной (ни классической, ни квантовой);
- 2) не описывала другие, кроме водорода, атомы;
- 3) не объясняла интенсивности спектральных линий.

II. ЗАДАЧИ

Задача 8.1

Найти радиусы первых трех боровских орбит в атоме водорода и скорости электронов на них.

Решение

Радиус n -ой боровской орбиты

$$r_n = 4\pi\epsilon_0 \cdot \frac{\hbar^2}{m \cdot e^2} \cdot n^2 = r_1 \cdot n^2 = 5,29 \cdot 10^{-11} \cdot n^2 \text{ (м)}.$$

Тогда радиусы первой, второй и третьей орбит:

$$r_1 = 5,29 \cdot 10^{-11} \text{ м}; \quad r_2 = 2,117 \cdot 10^{-10} \text{ м}; \quad r_3 = 4,76 \cdot 10^{-10} \text{ м}.$$

Скорость электрона на n -ой боровской орбите

$$v_n = \frac{\hbar}{m \cdot r_n} \cdot n = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \cdot \hbar} \cdot \frac{1}{n} = \frac{v_1}{n} = \frac{2,19 \cdot 10^6}{n} \text{ м/с}.$$

Скорости электрона на первой, второй и третьей орбитах:

$$v_1 = 2,19 \cdot 10^6 \text{ м/с}; \quad v_2 = 1,09 \cdot 10^6 \text{ м/с}; \quad v_3 = 7,29 \cdot 10^5 \text{ м/с}.$$

Задача 8.2

Найти кинетическую, потенциальную и полную энергии электронов на первой и на n -ой боровских орбитах.

Решение

Полная энергия электрона, принимающая дискретные значения, которые зависят от номера орбиты n (главного квантового числа), определяется как

$$E_n = -\frac{1}{(4\pi\epsilon_0)^2} \cdot \frac{me^4}{2\hbar^2} \cdot \frac{1}{n^2} = -\frac{E_1}{n^2},$$

где $E_1 = 2,18 \cdot 10^{-18} \text{ Дж} = 13,6 \text{ эВ}$.

Тогда полная энергия электрона на n -ой орбите равна $E_n = -\frac{13,6}{n^2}$ эВ.

Кинетическая энергия электрона на n -ой орбите равна

$$T_n = -E_n,$$

а для первой боровской орбиты равна $T_1 = -E_1 = 13,6$ эВ.

Потенциальная энергия электрона на n -ой орбите равна

$$П_n = 2E_n,$$

а для первой боровской орбиты равна $П_1 = 2E_{n1} = -27,2$ эВ.

Задача 8.3

Найти частоту и период обращения электрона на первой боровской орбите в атоме водорода.

Решение

Период обращения (время одного оборота электрона на орбите) определим, воспользовавшись значениями скорости электрона на орбите и радиуса орбиты, вычисленными в задаче 8.1:

$$T = \frac{2\pi r_n}{v_n} = \frac{2\pi \cdot 5,29 \cdot 10^{-11}}{2,19 \cdot 10^6} = 1,5 \cdot 10^{-16} \text{ с},$$

а круговая и обычная частоты равны, соответственно,

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{1,5 \cdot 10^{-16}} = 4,2 \cdot 10^{16} \text{ рад/с}, \quad \nu = \frac{1}{T} = \frac{1}{1,5 \cdot 10^{-16}} = 6,67 \cdot 10^{15} \text{ Гц}$$

Задача 8.4

Найти наименьшую и наибольшую длины волн в ультрафиолетовом спектре (серия Лаймана) и в видимом спектре (серия Бальмера) водорода.

Решение

Длины волн фотонов, испускаемых атомом водорода, могут быть найдены по формуле Ридберга

$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{n_i^2} - \frac{1}{n_k^2} \right),$$

где $R = 1,1 \cdot 10^7 \text{ м}^{-1}$ – постоянная Ридберга.

Наибольшая длина волны (головная линия серии) для ультрафиолетового спектра

$$\frac{1}{\lambda_{\max}} = R \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} \right) = 8,25 \cdot 10^6 \text{ м}^{-1}$$

равна $\lambda_{\max} = 1,21 \cdot 10^{-7} \text{ м}$,

а наименьшая длина волны (для граничной линии) из соотношения

$$\frac{1}{\lambda_{\min}} = R \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{\infty} \right) = 1,1 \cdot 10^7 \text{ м}^{-1}$$

равна $\lambda_{\min} = 9,1 \cdot 10^{-8} \text{ м}$.

Применим аналогичный подход к нахождению длин волн серии Бальмера. Для головной линии серии

$$\frac{1}{\lambda_{\max}} = R \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} \right) = 1,53 \cdot 10^6 \text{ м}^{-1},$$

$$\lambda_{\max} = 6,55 \cdot 10^{-7} \text{ м}.$$

Для граничной линии серии

$$\frac{1}{\lambda_{\min}} = R \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{\infty} \right) = 2,75 \cdot 10^6 \text{ м}^{-1},$$

$$\lambda_{\min} = 3,64 \cdot 10^{-7} \text{ м}.$$

Это значение не принадлежит к видимой части спектра (длины волн видимого спектра лежат в интервале $0,4 \cdot 10^{-6} \div 0,76 \cdot 10^{-6} \text{ мкм}$).

Рассчитаем значения длин волн для переходов на второй уровень с вышележащих уровней.

Если $n_i = 2$, а $n_k = 3$, то

$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} \right) = 1,53 \cdot 10^6 \text{ м}^{-1}, \quad \lambda = 6,55 \cdot 10^{-7} \text{ м.}$$

Если $n_i = 2$, а $n_k = 4$, то

$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{4^2} \right) = 2,0625 \cdot 10^6 \text{ м}^{-1}, \quad \lambda = 4,85 \cdot 10^{-7} \text{ м.}$$

Если $n_i = 2$, а $n_k = 5$, то

$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{5^2} \right) = 2,31 \cdot 10^6 \text{ м}^{-1}, \quad \lambda = 4,33 \cdot 10^{-7} \text{ м.}$$

Если $n_i = 2$, а $n_k = 6$, то

$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{6^2} \right) = 2,44 \cdot 10^6 \text{ м}^{-1}, \quad \lambda = 4,09 \cdot 10^{-7} \text{ м.}$$

Если $n_i = 2$, а $n_k = 7$, то

$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{7^2} \right) = 2,53 \cdot 10^6 \text{ м}^{-1}, \quad \lambda = 3,96 \cdot 10^{-7} \text{ м.}$$

Эта спектральная линия лежит в ультрафиолетовой части спектра, поэтому минимальная длина волны видимого излучения соответствует переходу с шестого на второй уровень.

Таким образом, в видимом диапазоне находятся 4 линии спектральной серии Бальмера, соответствующие переходам электронов на второй уровень с третьего, четвертого, пятого и шестого уровней. Остальные линии серии лежат в ультрафиолетовой области спектра.

Задача 8.5

Электрон в атоме водорода перешел с третьего энергетического уровня на второй. Определить длину волны, импульс и энергию испущенного фотона. Найти скорость, с которой начал двигаться при этом атом.

Решение

Длина волны испущенного фотона может быть найдена по формуле Ридберга для серии Бальмера при $n_i = 2$, а $n_k = 3$,

$$\frac{1}{\lambda_{\max}} = R \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} \right) = 1,53 \cdot 10^6 \text{ м}^{-1} \text{ и } \lambda_{\max} = 6,55 \cdot 10^{-7} \text{ м.}$$

Импульс и энергия фотона, соответственно, равны

$$p = \frac{h}{\lambda} = \frac{6,62 \cdot 10^{-34}}{6,55 \cdot 10^{-7}} = 1,01 \cdot 10^{-27} \text{ кг} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^{-1},$$

$$\varepsilon = \frac{hc}{\lambda} = pc = 1,01 \cdot 10^{-27} \cdot 3 \cdot 10^8 = 3,03 \cdot 10^{-19} \text{ Дж.}$$

До испускания фотона атом водорода покоился, следовательно, его импульс был равен нулю. С учетом того, что масса атома водорода равна сумме масс протона и электрона, закон сохранения импульса имеет вид

$$0 = m_H v - p,$$

$$v = \frac{m_H}{p} = \frac{m_p + m_e}{p} = \frac{1,66 \cdot 10^{-27} + 9,1 \cdot 10^{-31}}{1,01 \cdot 10^{-27}} = 1,65 \text{ м/с.}$$

Задача 8.6

Найти потенциал ионизации и первый потенциал возбуждения атома водорода.

Решение

Потенциал ионизации – это та разность потенциалов, которую должен пройти электрон, чтобы, столкнувшись с атомом в основном состоянии, ионизировать его.

$$eU_i = \varepsilon = \frac{hc}{\lambda} = hcR \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{\infty} \right) = 13,6 \text{ эВ.}$$

Отсюда

$$U_i = 13,6 \text{ В.}$$

Первый потенциал возбуждения – это та разность потенциалов, которую должен пройти электрон, чтобы, столкнувшись с атомом в основном состоянии, перевести его электрон с первого на второй уровень.

$$eU_1 = \varepsilon = \frac{hc}{\lambda} = hcR \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} \right) = 10,2 \text{ эВ} \quad \text{и} \quad U_1 = 10,2 \text{ В}.$$

Задача 8.7

Какую наименьшую энергию должны иметь электроны, чтобы при возбуждении атомов водорода ударами этих электронов появились линии всех серий спектра водорода? Какую наименьшую скорость должны иметь эти электроны?

Решение

Все линии всех серий водорода появляются при получении атомом энергии равной энергии ионизации

$$\varepsilon = \frac{hc}{\lambda} = hcR \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{\infty} \right) = hcR = 2,19 \cdot 10^{-18} \text{ Дж} = 13,6 \text{ эВ}.$$

Энергию ε атому водорода передает электрон с кинетической энергией $T = \frac{mv^2}{2}$, которая приобретена в электрическом поле, работа которого равна eU .

Тогда из равенства $\varepsilon = eU = \frac{mv^2}{2}$ скорость электрона должна быть не меньше, чем

$$v = \sqrt{\frac{2\varepsilon}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 2,19 \cdot 10^{-18}}{9,1 \cdot 10^{-31}}} = 2,2 \cdot 10^6 \text{ м/с}.$$

Задача 8.8

В каких пределах должны лежать длины волн фотонов монохроматического света, чтобы при возбуждении атомов водорода квантами этого света наблюдались три спектральные линии?

Решение

Для наблюдения трех спектральных линий необходимо, чтобы, поглотив кванты света и перейдя на третий энергетический уровень, электроны в атомах водорода осуществляли переход на первый уровень. В этих случаях реализуются переходы с 3-го на 2-й, затем со 2-го на 1-й, а также непо-

средственно с 3-его уровня на 1-й. В результате будут наблюдаться две линии Лаймана и одна – серии Бальмера.

Максимальная длина волны будет при $n_i = 1$, $n_k = 2$ в формуле Ридберга

$$\frac{1}{\lambda_{\max}} = R \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} \right) = 8,25 \cdot 10^6 \text{ м}^{-1}, \quad \lambda_{\max} = 1,21 \cdot 10^{-7} \text{ м}.$$

Минимальная длина волны будет при $n_i = 1$, $n_k = 3$

$$\frac{1}{\lambda_{\max}} = R \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{3^2} \right) = 9,78 \cdot 10^6 \text{ м}^{-1}, \quad \lambda_{\max} = 1,023 \cdot 10^{-7} \text{ м}.$$

Следовательно, длины волн фотонов должны лежать в интервале

$$102,3 \leq \lambda \leq 121 \text{ нм}.$$

Задача 8.9

Атом водорода в основном состоянии поглотил квант света с длиной волны $\lambda = 121,5$ нм. Вычислить радиус электронной орбиты возбужденного атома водорода и момент импульса электрона на этой орбите.

Решение

В невозбужденном атоме водорода электрон находится на первом уровне. Воспользовавшись формулой Ридберга, найдем номер уровня, куда в результате поглощения кванта перешел электрон. Из выразим n_k из

$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{n_i^2} - \frac{1}{n_k^2} \right):$$

$$n_k = n_i \sqrt{\frac{\lambda R}{\lambda R - n_i^2}} = 1 \cdot \sqrt{\frac{121,5 \cdot 10^{-9} \cdot 1,1 \cdot 10^7}{121,5 \cdot 10^{-9} \cdot 1,1 \cdot 10^7 - 1}} = 2.$$

Это означает, что в результате поглощения кванта электрон в атоме водорода перешел на второй энергетический уровень.

Поскольку радиус n -ой боровской орбиты

$$r_n = 4\pi\epsilon_0 \frac{\hbar^2}{me^2} n^2 = r_1 \cdot n^2 = 0,53 \cdot 10^{-10} \cdot n^2 \text{ м},$$

радиус 2-ой орбиты $r_2 = 0,53 \cdot 10^{-10} \cdot 2^2 = 2,12 \cdot 10^{-10} \text{ м}.$

Момент импульса электрона на второй орбите можно найти двумя способами:

1) вычислив скорость электрона на второй орбите по формуле $v_n = \frac{v_1}{n}$,

$$v_2 = \frac{v_1}{2} = \frac{2,19 \cdot 10^6}{2} = 1,09 \cdot 10^6 \text{ м/с},$$

и, зная массу электрона $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$ кг и радиус второй орбиты r_2 , определить момент импульса по формуле

$$L_2 = mv_2 r_2 = 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 1,09 \cdot 10^6 \cdot 2,12 \cdot 10^{-10} = 2,1 \cdot 10^{-34} \text{ кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}^{-1};$$

2) воспользовавшись правилом квантования Бора $L_n = mv_n r_n = n\hbar$:

$$L_2 = 2\hbar = 2 \cdot 1,055 \cdot 10^{-34} = 2,1 \cdot 10^{-34} \text{ кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}^{-1}.$$

Задача 8.10

Квант света с энергией 15 эВ выбивает электрон, находящийся в основном состоянии в атоме водорода. С какой скоростью электрон будет двигаться вне атома?

Решение

Энергия фотона расходуется на ионизацию атома водорода, который находится в основном состоянии, а оставшая часть переходит в кинетическую энергию электрона, покинувшего атом.

Энергия ионизации атома водорода, т. е. энергия, необходимая для того, чтобы перевести электрон с первого энергетического уровня ($n_1 = 1$) на последний ($n_k = \infty$), равна

$$\varepsilon = \frac{hc}{\lambda} = hcR \left(\frac{1}{n_i^2} - \frac{1}{n_k^2} \right) = 13,6 \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{\infty} \right) = 13,6 \text{ эВ}.$$

Тогда кинетическая энергия электрона

$$T = E - \varepsilon_1 = 15 - 13,6 = 1,4 \text{ эВ} = 2,24 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}.$$

Из $T = \frac{mv^2}{2}$ вычисляем скорость электрона:

$$v = \sqrt{\frac{2T}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 2,24 \cdot 10^{-19}}{9,1 \cdot 10^{-31}}} = 7 \cdot 10^5 \text{ м/с.}$$

Задача 8.11

Найти изменение кинетической энергии электрона в атоме водорода при излучении им фотона с длиной волны $\lambda = 102,3 \text{ нм}$?

Решение

Длина волны $\lambda = 102,3 \text{ нм}$ относится к ультрафиолетовому диапазону, следовательно, фотон с этой длиной волны относится к серии Лаймана ($n_i = 1$). Формула Ридберга в этом случае имеет вид

$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{n^2} \right),$$

откуда

$$\frac{1}{n^2} = 1 - \frac{1}{\lambda R}.$$

Номер уровня, с которого электрон перешел на первый уровень, равен

$$n = \sqrt{\frac{\lambda R}{\lambda R - 1}} = \sqrt{\frac{102,3 \cdot 10^{-9} \cdot 1,1 \cdot 10^7}{102,3 \cdot 10^{-9} \cdot 1,1 \cdot 10^7 - 1}} = 3.$$

Полная энергия электрона на третьей орбите составляет

$$E_3 = -\frac{13,6}{n^2} = -\frac{13,6}{3^2} = -1,51 \text{ эВ.}$$

Поскольку кинетическая энергия электрона $T = -E_n$, то она составит $T_3 = -E_3 = 1,51 \text{ эВ}$.

Поскольку кинетическая энергия электрона в основном состоянии, т. е. на первом энергетическом уровне, $T_1 = -E_1 = 13,6 \text{ эВ}$, то искомое изменение кинетической энергии $\Delta T = T_1 - T_3 = 13,6 - 1,51 = 12,09 \text{ эВ}$.

Задача 8.12

На дифракционную решетку нормально падает пучок света от разрядной трубки, наполненной атомарным водородом. Постоянная решетки $d = 5 \text{ мкм}$. Какому переходу электрона соответствует спектральная линия, наблюдаемая при помощи этой решетки в спектре пятого порядка под углом $\psi = 41^\circ$?

Решение

Длину волны найдем из условия дифракционного максимума для дифракционной решетки $d \sin \psi = k \lambda$:

$$\lambda = \frac{d \sin \psi}{k} = \frac{5 \cdot 10^{-6} \cdot \sin 41^\circ}{5} = 0,656 \cdot 10^{-6} \text{ м.}$$

Эта длина волны относится к видимому спектру, следовательно, переход был на второй энергетический уровень, а это означает, что в формуле Ридберга $n_i = 2$. Найдем n_k :

$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n_k^2} \right),$$
$$\frac{1}{n_k} = \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{\lambda R}} = \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{0,656 \cdot 10^{-6} \cdot 1,1 \cdot 10^7}} = 0,333,$$
$$n_k = 3.$$

Таким образом, электрон перешел с третьего на второй уровень.

Задача 8.13

Найти потенциал и энергию ионизации для двукратно ионизированного лития.

Решение

Формула Ридберга для водородоподобных ионов имеет вид

$$\frac{1}{\lambda} = Z^2 R \left(\frac{1}{n_i^2} - \frac{1}{n_k^2} \right),$$

где Z – номер элемента в таблице Менделеева (для лития $Z = 3$).

Энергия ионизации

$$\varepsilon_i = \frac{hc}{\lambda} = Z^2 hcR \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{\infty} \right) = 9 \cdot 13,6 \text{ эВ} = 122,4 \text{ эВ} = 1,96 \cdot 10^{-17} \text{ Дж.}$$

Кинетическую энергию, которую электроны передают атому лития, находящемуся в невозбужденном состоянии, они приобрели в электрическом поле, разность потенциалов которого U_i :

$$eU_i = T = \varepsilon_i,$$

откуда

$$U_i = \frac{\varepsilon_i}{e} = \frac{122,4 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}}{1,6 \cdot 10^{-19}} = 122,4 \text{ В.}$$

Задача 8.14

Однократно ионизированный атом гелия находится в основном состоянии. Может ли квант света, соответствующий переходу между первыми двумя энергетическими уровнями в двукратно ионизированном литии, вырвать электрон из этого атома гелия?

Решение

Квант света, испущенный литием, может ионизировать гелий, если энергия этого кванта больше или равна энергии ионизации гелия. Подсчитаем и сравним соответствующие энергии.

Длина волны фотона, испущенного литием ($Z_1 = 3$), соответствует головной линии серии Лаймана, поэтому энергия кванта, испущенного литием равна

$$\varepsilon = \frac{hc}{\lambda} = Z_1^2 hcR \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} \right) = \frac{3}{4} Z_1^2 hcR = \frac{27}{4} hcR = 6,75 \cdot 13,6 \text{ эВ} = 91,8 \text{ эВ.}$$

Энергия ионизации атома гелия ($Z_2 = 2$):

$$\varepsilon_i = \frac{hc}{\lambda_2} = Z_2^2 hcR \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{\infty} \right) = Z_2^2 hcR = 4 hcR = 4 \cdot 13,6 \text{ эВ} = 54,4 \text{ эВ.}$$

Поскольку $\varepsilon > \varepsilon_i$, то квант света, выпущенный литием, сможет ионизировать гелий.

III. КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

К8.1. Найти изменение орбитального механического момента электрона, если при переходе его из возбужденного состояния в основное испущен фотон с длиной волны $\lambda = 102$ нм. $[\Delta L = 2\hbar = 2,1 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}]$

К8.2. Определить максимальную и минимальную энергии фотона в видимой части спектра водорода.

$$[E_{\min} = 3,03 \cdot 10^{-19} \text{ Дж} = 1,89 \text{ эВ}; E_{\max} = 5,45 \cdot 10^{-19} \text{ Дж} = 3,41 \text{ эВ}]$$

К8.3. Электрон выбит из атома водорода, находящегося в основном состоянии, фотоном, частота которого $\nu = 3,62 \cdot 10^{15}$ Гц. Определить скорость электрона за пределами атома. $[\nu = 1,2 \text{ Мм/с}]$

К8.4. Атомарный водород облучают ультрафиолетовым излучением с длиной волны $\lambda = 95$ нм. Определить, какие спектральные линии в видимой области спектра появятся при этом.

$$[\lambda_3 = 0,656 \text{ мкм}, \lambda_4 = 0,486 \text{ мкм}, \lambda_5 = 0,434 \text{ мкм}]$$

К8.5. Максимальная длина волны спектральной водородной линии серии Лаймана равна 0,12 мкм. Определить максимальную длину волны линии серии Бальмера. $[\lambda = 0,648 \text{ мкм}]$

К8.6. Определите длину волны спектральной линии, соответствующей переходу электрона в атоме водорода с шестой боровской орбиты на вторую. К какой серии относится эта линия?

$$[\lambda = 0,41 \text{ мкм}, \text{четвертая линия серии Бальмера}]$$

К8.7. Найти работу, которую необходимо совершить, чтобы удалить электрон со второй боровской орбиты атома водорода за пределы притяжения его ядром. $[A = 5,45 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}]$

К8.8. Определите, какая энергия потребуется для полного отрыва электрона от ядра однократно ионизованного атома гелия, если: 1) электрон находится в основном состоянии; 2) электрон находится в состоянии, соответствующем главному квантовому числу $n = 3$.

$$[\varepsilon_{i1} = 54,2 \text{ эВ}, \varepsilon_{i2} = 6,02 \text{ эВ}]$$

К8.9. В излучении звезды обнаружен водородоподобный спектр, длины волн которого в 9 раз меньше, чем у атомарного водорода. Определите элемент, которому принадлежит данный спектр. [$Z = 3$, литий]

К8.10. При освещении гелия рентгеновскими лучами с длиной волны $\lambda = 10^{-10}$ м происходит ионизация гелия. Зная, что энергия ионизации гелия равна 24,5 эВ, определить скорость электрона, покидающего атом гелия. Начальной кинетической энергией электрона можно пренебречь.

$$\left[v = 6,6 \cdot 10^7 \text{ м/с} \right]$$

Глава 9.

ЭЛЕМЕНТЫ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ

I. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

1. Волны де Бройля

Луи де Бройль (1892–1987, Нобелевская премия 1929 г.) выдвинул гипотезу о том, что корпускулярно-волновая двойственность свойств характерна не только для света (рис. 9.1, а). Он предположил, что все материальные частицы (электроны, протоны и пр.) обладают не только корпускулярными, но и волновыми свойствами. При этом эти волны имеют специфическую (не электромагнитную) природу, для которой нельзя найти аналогии в классической физике.

Де Бройль выдвинул предположение о том, что формулы, описывающие энергию и импульс фотона ($\varepsilon = \hbar\omega = \frac{hc}{\lambda}$, $p = \hbar k = \frac{2\pi\hbar}{\lambda}$), могут быть применены для описания движения электрона и других частиц как волнового процесса, длина волны которого

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar}{p} = \frac{h}{p}, \quad (9.1)$$

где λ – **длина волны де Бройля**, $h = 2\pi\hbar = 6,626 \cdot 10^{-34}$ Дж·с – постоянная Планка, p – импульс частицы, равный для нерелятивистского случая

$p = mv$, а для релятивистского случая $p = \frac{mv}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$, где m – масса покоя

частицы, v – ее скорость, $c = 3 \cdot 10^8$ м/с – скорость света в вакууме.

Используя соотношение

$$T = \frac{mv^2}{2} = \frac{(mv)^2}{2m} = \frac{p^2}{2m} = \frac{h^2}{2m\lambda}, \quad (9.2)$$

можно длину волны де Бройля выразить через кинетическую энергию частицы:

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2m \cdot T}} = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2m \cdot T}}. \quad (9.3)$$

Еще одна запись формулы де Бройля в скалярном и вектором виде, соответственно,

$$p = \frac{2\pi\hbar}{\lambda} = \hbar k, \quad (9.4)$$

$$\vec{p} = \hbar \vec{k}, \quad (9.5)$$

где $k = 2\pi/\lambda$ и \vec{k} – волновое число и волновой вектор.

Оценка длины волны де Бройля для обычного материального макрообъекта, имеющего массу $m \sim 1$ кг и движущегося со скоростью $v \sim 1$ м/с дает длину волны де Бройля

$$\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{6,62 \cdot 10^{-34}}{1 \cdot 1} = 6,62 \cdot 10^{-34} \text{ м.}$$

Такие волновые свойства невозможно зарегистрировать и проверить, т. к. они существенно меньше размеров атомного ядра, равного $\sim 10^{-15}$ м.

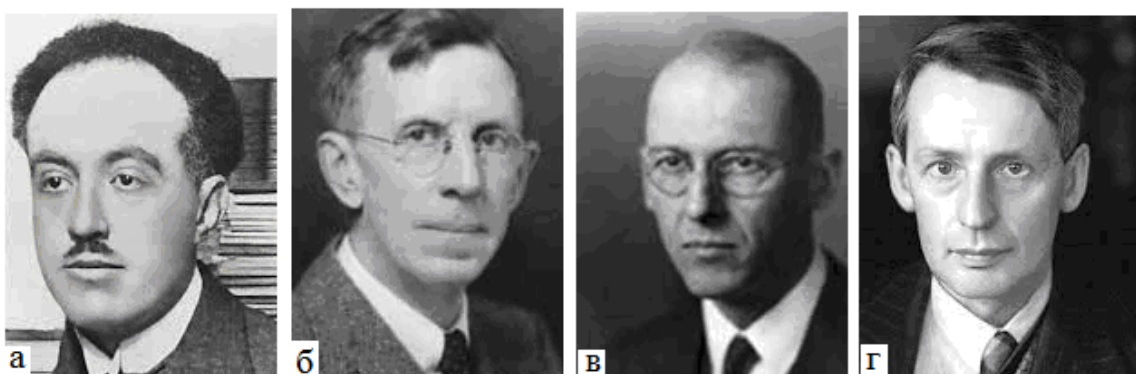


Рисунок 9.1. – Луи де Бройль (а), Клинтон Дэвиссон (б),
Лестер Джермер (в), Джордж Томсон (г)

Расчет по предложенной формуле длины волны для электрона, движущегося в электронно-лучевой трубке, дает

$$\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{6,62 \cdot 10^{-34}}{9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 10^5} = 7,2 \cdot 10^{-9} \text{ м.}$$

Этот результат такого же порядка, как и размеры атома, это означает, что для волновые свойства электронов должны проявиться, например, при

их рассеянии на тех же кристаллах, на которых наблюдается дифракция рентгеновских лучей.

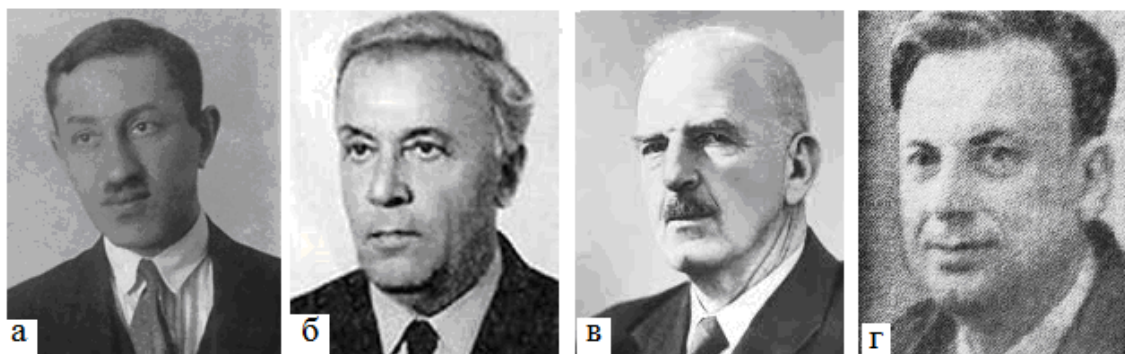


Рисунок 9.2. – Петр Тартаковский (а), Валентин Фабрикант (б),
Леонид Биберман (в), Николай Сушкин (г)

Первые экспериментальные подтверждения гипотезы де Бройля были получены в 1927 г. американскими физиками Клинтоном Дж. Дэвиссоном (1881–1958) и Лестером Х. Джермером (1896–1971) (рис. 9.1, б, в). Они обнаружили, что пучок электронов, рассеивающийся на кристалле никеля, дает отчетливую дифракционную картину, подобную той, которая возникает при рассеянии на кристалле коротковолнового рентгеновского излучения. В этих экспериментах кристалл играл роль естественной дифракционной решетки. По положению дифракционных максимумов была определена длина волны электронного пучка, которая оказалась в полном соответствии с величиной длины волны, вычисленной по формуле де Бройля.

В 1928 г. опыты английского ученого Джорджа Паджет Томсона (рис. 9.1, г) (1892–1975) (сын Джозефа Джона Томсона, открывшего электрон) и независимо от него Петра Савича Тартаковского (1895–1940) (рис. 9.2, а) по дифракции быстрых (с энергией в $\sim 10^4$ эВ) электронов на тонкой поликристаллической фольге никеля дали новое подтверждение гипотезы де Бройля.

За свои экспериментальные работы по дифракции электронов на кристаллах Дэвиссон и Томсон в 1937 г. получили Нобелевскую премию.

Экспериментальная проверка волновой природы частиц продолжалась и в последующие годы. В 1928–30 гг. О. Штерн и И. Эстерман провели опыты по дифракции на кристаллах атомов гелия, неона, молекул водорода и дейтерия. В 1936 г. Х. Халбан и П. Присверк, а также Митчелл и Пауэрс, вскоре после открытия Джеймсом Чедвиком нейтрона в 1932 г., провели

эксперименты по дифракции нейтронов. Все эти исследования позволили утверждать, что волновые свойства являются универсальными для всех частиц, а не только для электронов.

Очень важным этапом в понимании волновых свойств частиц явились опыты с одиночными электронами, проведенные в 1949 г. советскими учеными В. А. Фабрикантом (1907–1991), Л. М. Биберманом (1915–1998), Н. Г. Сушкиным (рис. 9.2, б, в, г). Проведенные эксперименты по дифракции отдельных электронов на щели показали, что волновыми свойствами обладают и отдельные частицы.

Правило квантования орбит в теории Бора получило наглядную интерпретацию с введением понятия волн де Бройля. В применении к орбитальному движению электрона на стационарной круговой орбите в атоме водорода из правила квантования Бора $mv_n r_n = n\hbar = \frac{nh}{2\pi}$ следует, что

$$2\pi r_n = \frac{nh}{mv_n} = \frac{nh}{p_n} = n\lambda_n. \quad (9.6)$$

Это означает, что длина волны де Бройля целое число раз укладывается на длине стационарной круговой орбиты (рис. 9.3). С другой стороны, можно ввести и иное определение стационарной орбиты, как орбиты, на которой укладывается целое число длин волн электрона. Кроме того, из формулы (9.6) следует, что длина волны де Бройля электронов на различных орбитах различна вследствие различия скоростей электронов на них.

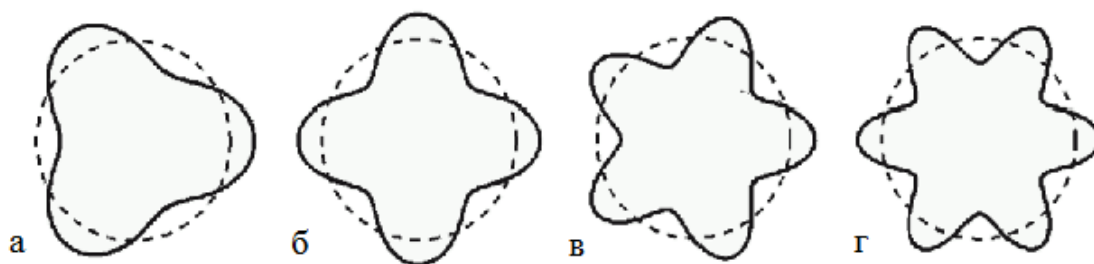


Рисунок 9.3 – Разрешенные орбиты, заданные стоячими волнами де Бройля: $n = 3$ (а), $n = 4$ (б), $n = 5$ (в), $n = 6$ (г)

2. Соотношение неопределенностей Гейзенберга

В классической физике исчерпывающее описание состояния частицы определяется динамическими параметрами (координатами, импульсом, моментом импульса, энергией). Однако реальное поведение микрочастиц показывает, что существует принципиальный предел точности, с которой подобные переменные могут быть указаны и измерены.

Глубокий анализ причин существования этого предела провел немецкий физик, лауреат Нобелевской премии 1933 г. Вернер Гейзенберг (1901–1976) (рис. 9.4, *а*). В 1927 г. он сформулировал принцип неопределенности – фундаментальное положение квантовой теории, утверждающее, что характеризующие физическую систему так называемые дополнительные величины (например, координата и импульс) не могут одновременно принимать точные значения. Этот принцип отражает двойственную, корпускулярно-волновую природу частиц материи (электронов, протонов, и пр.). Количественные соотношения, выражающие этот принцип в конкретных случаях, называют **соотношениями неопределенностей**.

Первое из них ограничивает точности одновременного измерения **координат** и соответствующих проекций **импульса** частицы. Для проекции, например, на ось x оно выглядит так:

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \hbar. \quad (9.7)$$

Второе соотношение устанавливает неопределенность одновременного измерения **энергии** за данный промежуток **времени**:

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar. \quad (9.8)$$



Рисунок 9.4 – Вернер Гейзенберг (*а*), Макс Борн (*б*), Эрвин Шредингер (*в*)

Следствия из соотношений неопределенностей:

1. Невозможно состояние, в котором частица находилась бы в состоянии покоя.
2. При рассмотрении движения квантового объекта необходимо во многих случаях отказаться от самого понятия классической траектории.
3. Часто теряет смысл деление полной энергии E частицы (как квантового объекта) на потенциальную и кинетическую, поскольку первая зависит от координат, а вторая – от импульса. Эти же динамические переменные не могут иметь одновременно определенного значения.

3. Вероятностный смысл волн де Бройля. Волновая функция

Распространение волн де Бройля в пространстве не связано с распространением в пространстве какого-либо поля, известного в классической физике, например, электромагнитной природы. Эти волны имеют специфическую квантовую природу, не имеющую аналогов в классической физике.

Для понимания физического смысла волн де Бройля вспомним взаимосвязь между корпускулярными и волновыми свойствами света. Тогда вопрос о природе волн, связанных с частицами вещества, можно сформулировать в виде вопроса о физическом смысле амплитуды этих волн.

Вместо амплитуды волны A будем рассматривать интенсивность волны, которая, как известно, пропорциональна квадрату модуля амплитуды ($I \sim |A|^2$). В опытах по дифракции картина, наблюдающаяся для микрочастиц, характеризуется неодинаковым распределением потоков микрочастиц в различных направлениях. Наличие максимумов в дифракционной картине означает, что в определенных направлениях распределяются волны де Бройля с наибольшей интенсивностью. А интенсивность будет максимальной, если в этом направлении распространяется максимальное число частиц. Это означает, что дифракционная картина для микрочастиц является проявлением статистической (вероятностной) закономерности в распределении частиц: где интенсивность волны де Бройля максимальная, там и частиц больше. Это послужило основой своеобразного статистического, вероятностного толкования волн де Бройля: квадрат модуля амплитуды волн де Бройля в данной точке является мерой вероятности того, что частица обнаруживается в данной точке.

Волны де Бройля в квантовой механике рассматриваются как **волны вероятности**, т. е. вероятность обнаружить частицу в различных точках пространства меняется по волновому закону. Но для некоторых точек про-

странства такая вероятность будет отрицательной (т. е. частица не попадает в эту область). Немецкий физик лауреат Нобелевской премии 1954 г. Макс Борн (1882–1970) (рис. 9.4, б) в 1926 г. предположил, что по волновому закону меняется не сама вероятность, а амплитуда вероятности, которую также называют **волновой функцией** или **Ψ -функцией** (пси-функцией).

Таким образом, в квантовой теории состояние частицы задается пси-функцией $\Psi(\vec{r}, t)$, которая является комплексной величиной и формально обладает волновыми свойствами. По идее М. Борна, движение любой микрочастицы по отдельности подчиняется вероятностным законам. Распределение вероятности, характеризующее это движение, проявляется в результате регистрации достаточно большого количества частиц. Это распределение оказывается таким же, как и распределение интенсивности волны: там, где интенсивность волны больше, регистрируется и большее число частиц.

В квантовой теории постановка вопроса состоит не в точном предсказании событий, а в определении вероятностей этих событий. Пси-функция $\Psi(\vec{r}, t)$ и является той величиной, которая позволяет находить все вероятности.

Вероятность нахождения частицы в объеме dV в момент t определяется как

$$dP = |\Psi|^2 dV = \Psi \cdot \Psi^* dV, \quad (9.9)$$

где Ψ^* – комплексно-сопряженная функция. Тогда **плотность вероятности**, т. е. вероятность нахождения частицы в единице объема

$$P = |\Psi|^2 = \Psi \cdot \Psi^*. \quad (9.10)$$

Пси-функция, которая, вообще говоря, определяется с точностью до произвольного постоянного множителя, выбирается так, чтобы она удовлетворяла **условию нормировки**:

$$\int |\Psi|^2 dV = \int \Psi \cdot \Psi^* dV = 1, \quad (9.11)$$

где интеграл берется по всему пространству или по той области, где Ψ отлична от нуля. Условие нормировки означает, что во всей области, где $\Psi \neq 0$, частица находится с достоверностью. Пси-функцию, удовлетворяющую условию нормировки, называют **нормированной**.

Таким образом, описание состояния микрообъекта с помощью волновой функции имеет статистический, вероятностный характер: квадрат модуля волновой функции $|\Psi|^2$ (квадрат модуля амплитуды волн де Бройля) определяет вероятность нахождения частицы в данный момент времени в определенном ограниченном объеме. Сама же волновая функция является основной характеристикой состояния микрообъектов (элементарных частиц, атомов, молекул). С ее помощью определяются значения физических величин, характеризующих данный объект.

4. Уравнение Шредингера

В классической механике основным уравнением является уравнение II закона Ньютона.

В квантовой механике также требовалось уравнение, которое позволяло бы описывать движение микрочастиц в пространстве и во времени. При этом следовало учесть характерную для микромира корпускулярно-волновую двойственность и тот факт, что соотношение неопределенностей Гейзенберга накладывало ограничения на точность нахождения основных характеристик. Основным должно быть уравнение относительно волновой функции, ибо именно она, или, точнее, ее квадрат определяет вероятность нахождения частицы в данный момент времени в заданном определенном объеме. Кроме того, искомое уравнение должно учитывать волновые свойства частиц, т. е. должно быть волновым уравнением (дифференциальным уравнением второго порядка), чтобы учесть волновые свойства. Именно такое уравнение предложил в 1926 г. австрийский физик-теоретик, лауреат Нобелевской премии 1933 г. Эрвин Шредингер (1887–1961) (рис. 9.4, в).

Уравнение Шредингера – основное уравнение нерелятивистской квантовой теории – описывает изменение состояния системы во времени. Оно играет в квантовой механике такую же роль, как основное уравнение динамики (II закон Ньютона) в нерелятивистской классической механике.

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi + U\Psi = i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}, \quad (9.12)$$

где m – масса частицы, $\Psi(x, y, z, t)$ – волновая функция, $U = U(x, y, z, t)$ – потенциальная энергия частицы в силовом поле, в котором движется частица,

$i = \sqrt{-1}$ – мнимая единица, $\Delta\Psi = \frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}$ – оператор Лапласа.

Поскольку приведенная запись уравнения Шредингера содержит производную по времени $\frac{\partial \Psi}{\partial t}$, то такое уравнение называется **временным**.

Для большинства физических явлений важно получать стационарные решения уравнения (не зависящие от времени). В этом случае потенциальная энергия не зависит от времени и является функцией типа $U = U(x, y, z)$.

Решение временного уравнения Шредингера будем искать в виде, в котором разделены переменные

$$\Psi(x, y, z, t) = \psi(x, y, z) \cdot \varphi(t), \quad (9.13)$$

Подставим $\Psi(x, y, z, t)$ в уравнение Шредингера, предварительно продифференцировав:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi \cdot \varphi + U \psi \cdot \varphi = i\hbar \psi \frac{\partial \varphi}{\partial t}. \quad (9.14)$$

Поменяем знаки и разделим левую и правую части на $\psi \varphi$:

$$\frac{\hbar^2}{2m} \cdot \frac{\Delta \psi}{\psi} - U = -\frac{i\hbar}{\varphi} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t}. \quad (9.14)$$

Левая часть этого уравнения – это функция только координат, а правая – только функция времени. Уравнение удовлетворяется только при единственном условии, когда обе части равны постоянной величине, которую обозначим через E .

Получили **стационарное уравнение Шредингера**:

$$\Delta \psi + \frac{2m}{\hbar^2} (E - U) \psi = 0. \quad (9.15)$$

Функции ψ , удовлетворяющие этому уравнению при данном U , называются **собственными функциями**. Значения, при которых существуют решения уравнения Шредингера, называются **собственными значениями**.

5. Водородоподобная система в квантовой механике

Квантовомеханические представления окончательно разрешили все противоречия, присущие теории Бора, описывающей атом водорода.

Уравнение Шредингера для атома водорода имеет вид

$$\Delta\psi + \frac{2m}{\hbar^2} \left(E + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{e^2}{r^2} \right) \psi = 0, \quad (9.16)$$

где $U = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{e^2}{r^2}$ – потенциальная энергия электрона в атоме водорода (r – расстояние от электрона до ядра).

Собственные значения

$$E_n = -\left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \cdot \frac{me^4}{2\hbar^2} \cdot \frac{1}{n^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (9.17)$$

$$E_1 = -2,18 \cdot 10^{-18} \text{ Дж} = -13,6 \text{ эВ}.$$

Собственные функции уравнения Шредингера содержат три целочисленных параметра n, l, m , т. е. $\psi = \psi_{nlm}$, где n – **главное квантовое число**, l – **орбитальное квантовое число**, m – **магнитное квантовое число**.

В полуклассическом приближении квантовые числа трактуются так: n характеризует диаметр орбиты, l – степень ее вытянутости, m – ориентацию нормали к плоскости орбиты и вектора ее магнитного момента в пространстве.

С точки зрения квантовой механики: n – характеризует не номера орбит, а номера слоев орбит или групп состояний, в которых другие квантовые числа могут принимать различные значения; l – характеризует величину момента импульса, m – характеризует ориентацию орбиты в пространстве.

Решения уравнения Шредингера получаются для $l \leq n-1$, т. е. орбитальное квантовое число l может принимать значения

$$l = 0, 1, 2, \dots, n-1. \quad (9.18)$$

При данном l квантовое число m может принимать $2l+1$ значений:

$$m_l = -l, -l+1, \dots, -1, 0, 1, 2, \dots, l-1, l. \quad (9.19)$$

Энергия электрона зависит только от главного квантового числа n , поэтому каждому собственному значению E_n (кроме E_1) соответствует несколько собственных функций ψ_{nlm} , отличающихся по l и m , т. е. атом водорода может находиться в различных состояниях при одном и том же значении энергии (при одном и том же n).

Состояния с одинаковой энергией (с одинаковым главным квантовым числом n) называются **вырожденными**, а число состояний с данным значением энергии – **кратностью вырождения**. Кратность вырождения, рассчитанная на основании трех квантовых чисел, равна n^2 .

В атомной физике применяются заимствованные из спектроскопии условные обозначения состояний с различными l .

Состояния с $l = 0, 1, 2, 3, 4$ обозначаются как s -, p -, d -, f -, g -состояния, а электроны в этих состояниях называют s -, p -, d -, f -, g -электронами, соответственно. Используемые буквенные обозначения соответствуют английским названиям соответствующих спектральных серий: *sharp* (резкая), *principal* (основная), *diffuse* (диффузная), *fundamental* (фундаментальная), *general* (генеральная) серии.

Распределение электронов в атоме с различными значениями n и l называются **электронной конфигурацией**. Значение n указывается числом перед значением l , указанным буквой. Число электронов с одинаковыми значениями n и l указывают в виде показателя степени при обозначении состояния электрона. Например, если два электрона находятся в состоянии с $n = 1$, $l = 0$, то электронная конфигурация записывается как $1s^2$.

6. Спин. Тонкая структура энергетических уровней. Опыты Штерна и Герлаха

Исследование спектров щелочных металлов показало, что каждая линия этих спектров является двойной (дублетом). Впоследствии расщепление спектральных линий было обнаружено и у других элементов. Структура спектра, отражающая расщепление энергетических уровней на компоненты, называется **тонкой структурой**, а сами сложные спектральные линии – **мультиплеты**.

Для объяснения тонкой структуры американские физики Джордж Уленбек (1900–1988) и Сэмюэл Гаудсмит (1902–1978) в 1925 г. ввели концепцию спина. На основании спектроскопических данных они предположили существование у электрона собственного механического момента

импульса, равного $\hbar/2$, и связанного с ним спинового магнитного момента

μ_s , равного по модулю магнетону Бора $\mu_B = \frac{\hbar e}{2m_e}$. При введении понятия

«спин» предполагалось, что электрон можно рассматривать как вращающийся волчок, а его спин – как характеристику такого вращения (англ. *spin* – вращение, верчение).

Таким образом, характеристика состояния электрона в атоме с помощью только трех квантовых чисел не является полной. Необходимо учитывать собственный момент импульса электрона – **спиновый момент импульса**. Он имеет чисто квантовую природу и не связан с перемещением этой элементарной частицы как целого. **Спин** характеризуется еще одним квантовым числом – s . Спином обладает большинство частиц: у электронов, протонов, нейтронов – спин полуцелый, у фотонов – целый (равный 1), у π - и K -мезонов – нулевой.

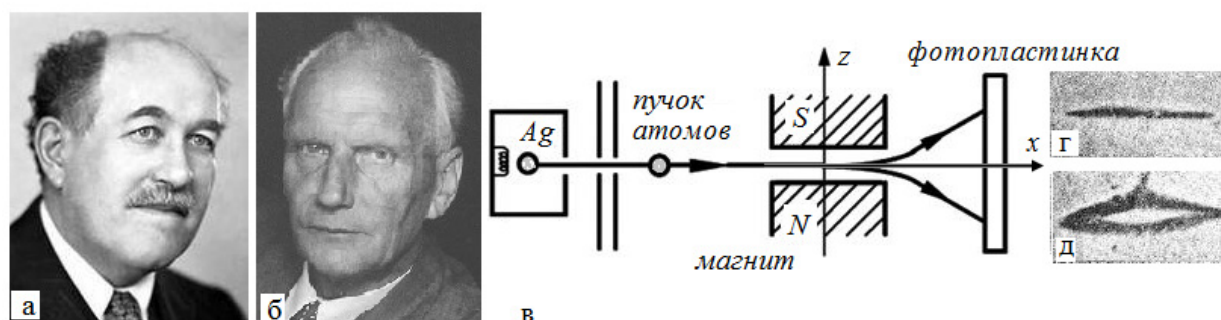


Рисунок 9.5 – Отто Штерн (а), Вальтер Герлах (б), схема опыта (в), результат опыта: без поля (г), с полем (д)

Наличие у электронов спина подтверждено опытом немецких ученых Отто Штерна (1888–1969) и Вальтера Герлаха (1889–1979), поставленным в 1922 г. (рис. 9.5, а, б). Через существенно неоднородное вдоль оси z магнитное поле на фотопластинку падал пучок атомов серебра (рис. 9.5, в). Атомы находились в заведомо невозбужденном состоянии, то есть результирующие орбитальные моменты их электронов были равны нулю. Казалось бы, магнитное поле не должно было влиять на движение этих атомов. Однако атомный пучок расщеплялся на две компоненты, расположенные симметрично относительно первоначального направления x (рис. 9.5, г, д). Объяснить это можно было только тем, что атомы обладают каким-то еще магнитным моментом (не орбитальным), за счет которого они ориентиру-

ются в магнитном поле: либо втягиваются в область более сильного поля, либо выталкиваются в область более слабого. На основании представлений о спине электроны атомов в каждом из пучков отличаются проекциями магнитного момента на направление магнитного поля (ось Z). Эти проекции могут иметь два значения спина. Из опытов найдена величина проекции спинового магнитного момента электрона (магнетон Бора).

7. Принцип Паули. Периодическая таблица элементов

Д. И. Менделеева

Учет спина электрона позволили лауреату Нобелевской премии 1945 г. швейцарскому физику Вольфгангу Паули (1900–1958) (рис. 9.6, а) в 1925 г. сформулировать **принцип запрета** (принцип исключения, **принцип Паули**): в произвольной физической системе не может быть двух электронов, находящихся в одном и том же квантовом состоянии, т. е. обладающих одинаковым набором четырех квантовых чисел n, l, m, s .

В соответствии с принципом Паули наибольшее число электронов в атоме, которые находятся в состояниях, определяемых: 1) главным квантовым числом n (кратность вырождения) составляет $N(n) = 2n^2$; 2) двумя квантовыми числами n и l – $N(n, l) = 2(2l + 1)$; 3) тремя квантовыми числами n, l, m – $N(n, l, m) = 2$; и 4) четырьмя квантовыми числами n, l, m, s – $N(n, l, m, s) = 1$ или 0.

На основе принципа Паули можно объяснить, как происходит заполнение электронных оболочек атома с ростом порядкового номера химического элемента Z . Каждый следующий электрон невозбужденного атома занимает самый глубокий (низкоэнергетический) из еще незаполненных уровней. И именно принцип Паули объяснил и то, почему электроны в атоме оказываются не все на самом нижнем разрешенном электронном уровне.

Как уже говорилось, данному значению главного квантового числа n соответствуют $2n^2$ состояний, отличающихся друг от друга значениями других квантовых чисел l, m, s . Совокупность электронов атома с одинаковым n , образуют так называемую **электронную оболочку**. Оболочки подразделяют на **подоболочки**, отличающиеся квантовым числом l . Раз-

личные состояния в подоболочке отличаются значениями m и s . Число состояний в подоболочке равно $2(2l + 1)$. Подоболочки обозначают

$$1s; 2s, 2p; 3s, 3p, 3d; \dots$$

где цифра обозначает квантовое число n , а буква – число l .

Таблица 9.1 – Состояния электрона в атоме

Главное квантовое число n	1	2	3	4	5
Символ оболочки	K	L	M	N	O
Максимальное число электронов в оболочке	2	8	18	32	50
Орбитальное квантовое число l	0	0 1	0 1 2	0 1 2 3	0 1 2 3 4
Символ подоболочки	$1s$	$2s$ $2p$	$3s$ $3p$ $3d$	$4s$ $4p$ $4d$ $4f$	$5s$ $5p$ $5d$ $5f$ $5g$
Максимальное число электронов в подоболочке	2	2 6	2 6 10	2 6 10 14	2 6 10 14 18

Распределение электронов по состояниям называют электронной конфигурацией. Ее записывают символически следующим образом: $1s^2 2s^2 2p^6 3s$. Это означает, что в атоме имеется два $1s$ -электрона, два $2s$ -электрона, шесть $2p$ -электронов и один $3s$ -электрон. Всего количество электронов – 11. Значит это натрий.



Рисунок 9.6 – Вольфганг Паули (а), Дмитрий Менделеев (б), Генри Мозли (в)

Принцип Паули дает объяснение периодической повторяемости свойств атомов, отражением которой является **периодическая система элементов**,

созданная Д. И. Менделеевым (1834-1907) (рис. 9.6, б). Понимание периодической системы элементов основано на идее об оболочечной структуре электронного облака атома.

Каждый следующий атом получается из предыдущего добавлением заряда ядра на единицу и добавлением одного электрона, который занимает разрешенное принципом Паули состояние с наименьшей энергией.

$Z = 1$. Водород. 1 электрон в $1s$ – состоянии: $1s^1$

$Z = 2$. Гелий. 2 электрона в $1s$ -состоянии (с противоположными спинами): $1s^2$.

$Z = 3$. Литий. 2 электрона в $1s$ – состоянии и 1 электрон в $2s$ -состоянии: $1s^2 2s^1$.

$Z = 4$. Бериллий. $1s^2 2s^2$.

$Z = 5$. Бор. $1s^2 2s^2 2p^1$.

.....

$Z = 10$. Неон. $1s^2 2s^2 2p^6$.

$Z = 11$. Натрий. $1s^2 2s^2 2p^6 3s^1$

.....

$Z = 18$. Аргон. $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6$.

После аргона начинаются отступления в последовательности заполнения электронных оболочек.

$Z = 19$. Калий. $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s^1$. Девятнадцатый электрон у калия находится не в $3d$, а в $4s$ – состоянии. Это происходит в силу того, что энергия электрона в $4s$ -состоянии меньше, чем в $3d$. Таким образом, при десяти незаполненных d -состояниях в третьей оболочке начинается заполнение четвертой оболочки. Поэтому химические свойства калия оказываются близкими к свойствам лития и натрия.

8. Характеристическое рентгеновское излучение. Закон Мозли

Большую роль в исследованиях строения и свойств электронных оболочек атомов сыграли рентгеновские лучи. Ранее мы рассматривали тормозное рентгеновское излучение, имеющее сплошной спектр и возникающее при торможении электронов в материале антикатада.

При повышении напряжения на рентгеновской трубке наряду со сплошным спектром появляется *линейчатый*. Он является дискретным,

т. е. состоящим из отдельных линий, и характеризует материал антикатада, в связи с чем и называется **характеристическим**. Возбуждение характеристического излучения происходит при вполне определенном для данного вещества анода напряжении на трубке U_0 , которое называется **потенциалом возбуждения**. На фоне сплошного спектра тормозного излучения данного анода линии характеристического (рис. 9.7) будут присутствовать при всех напряжениях $U > U_0$. Повышение напряжения на трубке увеличивает интенсивность и сплошного, и характеристического излучений, но длины волн характеристических максимумов и соотношение их интенсивностей остаются неизменными.

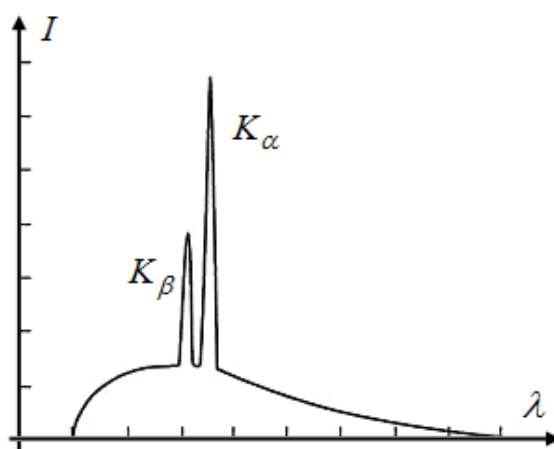


Рисунок 9.7 – Непрерывный спектр тормозного излучения и линии K -серии характеристического спектра для молибденового анода

Свойства характеристических рентгеновских спектров:

1. Рентгеновские спектры отличаются простотой и однообразием. С ростом атомного номера Z элемента они монотонно смещаются в коротковолновую сторону.

2. Характеристические спектры различных элементов однотипны и не меняются, если элемент находится в соединении с другими элементами. Это объясняется тем, что эти спектры возникают при переходах электронов во внутренних частях атомов, т. е. частях, имеющих сходное строение.

3. Характеристические спектры состоят из нескольких серий: K , L , M , Каждая серия – из небольшого числа линий: $K_\alpha, K_\beta, K_\gamma, \dots$, $L_\alpha, L_\beta, L_\gamma, \dots$ и т. д. в порядке убывания длины волны λ (рис. 9.8).

Возбуждение атома возникает при удалении одного из внутренних электронов (под действием электронов или фотонов достаточно большой

энергии). Если вырывается один из двух электронов K -уровня ($n = 1$), то освободившееся место может быть занято электроном какого-либо более высокого уровня: L , M , N и т. д. В результате возникает K -серия. Подобным образом возникают и другие серии.

K -серия обязательно сопровождается появлением и других серий, т. к. при ее испускании освобождаются электроны на L , M и других уровнях, которые будут заполняться электронами с более высоких уровней. Поэтому условие появления всех линий всех спектральных серий совпадает с условием появления K -серии.

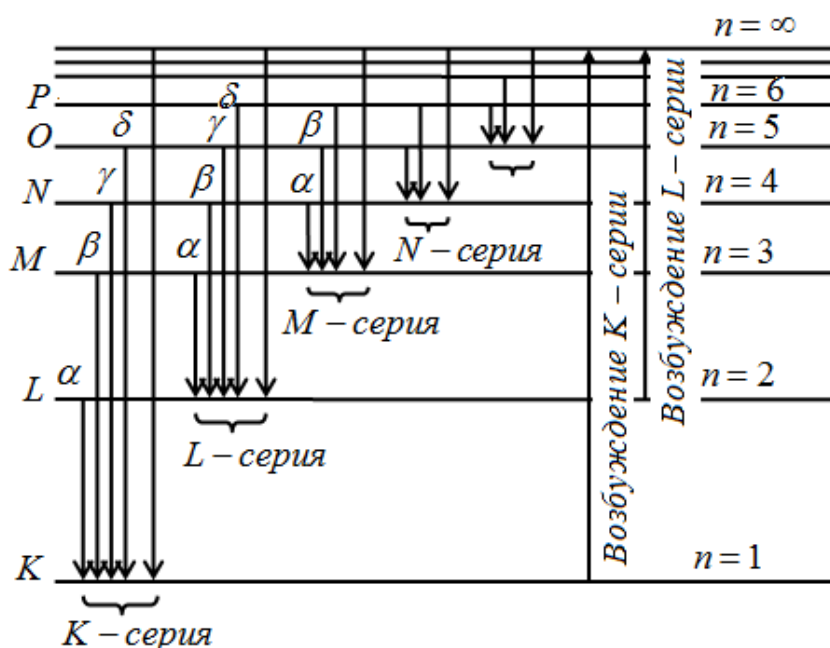


Рисунок 9.8 – Схема электронных переходов, ответственных за испускание линий характеристического спектра

4. Наиболее интенсивными линиями характеристического спектра являются линии K -серии: K_α , затем K_β , K_γ и т. д. (соответствующие им длины волн обозначают $\lambda_{K\alpha}$, $\lambda_{K\beta}$, $\lambda_{K\gamma}$). Такую закономерность в интенсивности последовательных линий этой серии можно объяснить тем, что вероятность занять вакантное место на определенной оболочке является наибольшей для электрона, расположенного на соседней (высшей) оболочке. Чем дальше находится электрон от оболочки с освободившимся местом, тем меньше соответствующая вероятность. Поэтому число фотонов, составляющих K_α -линию, является максимальным. За ним следует число фотонов, соответствующих K_β -линии и т. д.

5. При исследовании рентгеновских спектров английский физик Генри Мозли (1887–1915) (рис. 9.6, в) в 1913 г. установил закон, который связывает частоту ν спектральных линий с атомным номером Z элемента, излучающего эти линии. Было показано, что

$$\sqrt{\frac{\nu}{R}} = \frac{Z - \sigma}{n}, \quad (9.20)$$

где $R = 1,1 \cdot 10^7 \text{ м}^{-1}$ – постоянная Ридберга, σ – постоянная экранирования, n – главное квантовое число оболочки.

Более удобными является следующие записи **закона Мозли**:

$$\frac{1}{\lambda} = R(Z - \sigma)^2 \left(\frac{1}{n_i^2} - \frac{1}{n_k^2} \right), \quad (9.21)$$

$$\omega = R'(Z - \sigma)^2 \left(\frac{1}{n_i^2} - \frac{1}{n_k^2} \right), \quad (9.22)$$

где $R = 1,1 \cdot 10^7 \text{ м}^{-1}$ и $R' = 2,07 \cdot 10^{16} \text{ с}^{-1}$ – постоянные Ридберга для длин волн и для частот, соответственно, n_i, n_k – номера оболочек, между которыми происходит переход электронов.

Постоянная экранирования σ – безразмерный коэффициент, учитывающая влияние на отдельный электрон всех остальных электронов атома. Для K -серии $\sigma_K = 1$. Кроме того, $\sigma = 1$ для легких элементов (т. е. расположенных в начале таблицы Менделеева).

Как следует из закона Мозли, длины волн спектральных линий зависят лишь от атомного номера элемента, из которого изготовлен анод рентгеновской трубки, и являются индивидуальной характеристикой этого элемента. Нахождение элемента в чистом виде или в виде химического соединения не влияет на вид характеристического спектра.

Историческая ценность закона Мозли состоит в том, что он позволил с достоверностью расставить элементы по их местам в таблице Менделеева. Дело в том, что некоторые элементы трудно было расположить, базируясь только на значениях их атомных масс и химических свойствах. Например, элементы с номерами от $Z = 58$ до $Z = 72$ (так называемые лантаноиды) имеют практически одинаковые химические свойства, а трудность измере-

ния атомных масс обусловлена их сложным изотопным составом и технологическими сложностями разделения элементов. С помощью закона Мозли было доказано, что Д. И. Менделеев был прав, когда при составлении таблицы в первую очередь ориентировался на химические свойства элементов, иногда нарушая тенденцию последовательного увеличения атомной массы с возрастанием порядкового номера Z соответствующего химического элемента.

Одним из главных применений характеристического рентгеновского излучения является **рентгеноспектральный** анализ. Этот метод позволяет, не нарушая целостности исследуемого объекта, количественно определять элементы с $Z = 12$ до $Z = 92$ в материалах сложного химического состава (сплавах, минералах, керамиках, пластмассах и т. д.). Рентгеноспектральный анализ хорошо зарекомендовал себя при определении примесей в нефти и бензинах, серы в газолине, примесей в смазках и продуктах износа в машинах, при анализе катализаторов, при осуществлении экспрессных силикатных анализов и других.

Характеристическое излучение также находит применение в медицине, биологии и криминалистике. Методики позволяют обнаружить крайне малые количества токсических веществ в тканях организма и окружающей среде, для исследования микроэлементов у растений и животных.

Другой важной областью применения характеристического излучения является **рентгеноструктурный** анализ – метод, использующий явление дифракции рентгеновских лучей. Дифракционная картина зависит от длины волны используемых рентгеновских лучей и строения объекта. Для исследования атомной структуры применяют излучение с длиной волны $\sim 0,1$ нм, т. е. порядка размеров атома. Методами рентгеноструктурного анализа изучают структуру различных веществ. Наиболее информативен этот метод при исследовании кристаллов, поскольку кристаллы обладают строгой периодичностью строения и представляют собой созданную самой природой дифракционную решётку для рентгеновских лучей. Однако он доставляет ценные сведения и при исследовании тел с менее упорядоченной структурой, таких, как жидкости, аморфные тела, жидкие кристаллы, полимеры и другие. На основе многочисленных уже расшифрованных атомных структур может быть решена и обратная задача: по рентгенограмме поликристаллического вещества, например легированной стали, сплава, руды, лунного грунта, может быть установлен кристаллический состав этого вещества, т. е. выполнен фазовый анализ.

II. ЗАДАЧИ

Задача 9.1

Найти длину волны де Бройля для электронов, прошедших разность потенциалов $U_1 = 1 \text{ В}$ и $U_2 = 100 \text{ кВ}$.

Решение

Длина волны де Бройля определяется соотношением

$$\lambda = \frac{h}{p},$$

где $h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$, p – импульс частицы.

Для нахождения импульса частицы необходимо знать скорость частиц (электронов), которую можно найти, принимая во внимание тот факт, что свою кинетическую энергию электроны получили благодаря действию ускоряющего электрического поля:

$$eU_1 = \frac{mv^2}{2},$$

откуда скорость электрона равна $v = \sqrt{\frac{2eU_1}{m}}$, а импульс $p = \sqrt{2emU_1}$.

Учитывая это, длина волны электронов

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2emU_1}} = \frac{6,63 \cdot 10^{-34}}{\sqrt{2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 1}} = 1,23 \cdot 10^{-9} \text{ м}.$$

Найдем скорость электронов в том случае, когда ускоряющее напряжение $U_2 = 100 \text{ кВ}$.

$$v = \sqrt{\frac{2eU_2}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^5}{9,1 \cdot 10^{-31}}} = 1,8 \cdot 10^8 \text{ м/с}.$$

Расчет показывает, что скорость электронов близка к скорости света, поэтому следует учитывать релятивистские эффекты. Поэтому найти длину волны де Бройля можно двумя способами.

1 способ

Кинетическая энергия электронов, прошедших разность потенциалов U_2 , равна работе электрического поля $T = eU_2$, следовательно,

$$eU_2 = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} - 1 \right),$$

откуда

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{eU_2}{m_0 c^2} + 1.$$

Подставим числовые данные и получим

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{eU_2}{m_0 c^2} + 1 = \frac{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^5}{9,1 \cdot 10^{-31} \cdot (3 \cdot 10^8)^2} + 1 = 1,2.$$

$$\beta = 0,55.$$

Тогда импульс электрона

$$p = \frac{m_0 \beta c}{\sqrt{1 - \beta^2}} = 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 0,55 \cdot 3 \cdot 10^8 \cdot 1,2 = 1,8 \cdot 10^{-22} \text{ кг} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^{-1}.$$

Длина волны де Бройля

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{6,62 \cdot 10^{-34}}{1,8 \cdot 10^{-22}} = 3,68 \cdot 10^{-12} \text{ м}.$$

2 способ

Полагая, что второе ускоряющее напряжение обуславливает необходимость учета релятивистских поправок, сразу воспользуемся формулой, связывающей релятивистский импульс с кинетической энергией T и энергией покоя ε_0 электрона

$$p = \frac{\sqrt{T(T + 2\varepsilon_0)}}{c}.$$
 Принимая во внимание то, что

кинетическая энергия электрона равна энергии электрического поля, ускорившего этот электрон, т. е. $T = eU_2$, получим длину волны де Бройля электронов

$$\lambda = \frac{hc}{\sqrt{T(T + 2\varepsilon_0)}} = \frac{hc}{\sqrt{eU_2(eU_2 + 2m_0c^2)}} =$$

$$= \frac{6,62 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{\sqrt{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^5 (1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^5 + 2 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot (3 \cdot 10^8)^2)}} = 3,68 \cdot 10^{-12} \text{ м.}$$

Задача 9.2

В однородном магнитном поле, напряженность которого равна $H = 18,9 \text{ кА/м}$, по окружности радиусом $R = 8,3 \text{ мм}$ движется α -частица. Найти длину волны де Бройля для этой частицы.

Решение

На частицу, движущуюся в магнитном поле, действует магнитная составляющая силы Лоренца $\vec{F}_m = q[\vec{v}, \vec{B}]$. Если траекторией частицы является окружность, то это означает, что угол между направлением скорости частицы и магнитной индукцией $\alpha = 90^\circ$ и модуль силы равен $F_m = qvB$. Уравнение движения частицы

$$ma_n = qvB,$$

где $a_n = \frac{v^2}{R}$ – нормальное ускорение.

Поэтому

$$m \frac{v^2}{R} = qvB.$$

С учетом того, что магнитная индукция $\vec{B} = \mu\mu_0\vec{H}$, а для вакуума (воздуха) магнитная проницаемость $\mu = 1$, модуль магнитной индукции $B = \mu_0 H$. Тогда скорость α -частицы ($q = 2e$, $m = 4m_p$):

$$v = \frac{qBR}{m} = \frac{q\mu_0 HR}{m} = \frac{2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 1,26 \cdot 10^{-6} \cdot 18,9 \cdot 10^3 \cdot 8,3 \cdot 10^{-3}}{4 \cdot 1,66 \cdot 10^{-27}} = 9,5 \cdot 10^3 \text{ м/с.}$$

Длина волны де Бройля для α -частицы

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv} = \frac{6,63 \cdot 10^{-34}}{4 \cdot 1,66 \cdot 10^{-27} \cdot 9,5 \cdot 10^3} = 1,05 \cdot 10^{-11} \text{ м.}$$

Задача 9.3

На сколько изменится длина волны де Бройля электрона в атоме водорода, если атомом испущен фотон, длина волны которого соответствует головной линии серии Пашена?

Решение

Головная линия серии Пашена возникает при переходе электрона с четвертого ($n_k = 4$) на третий ($n_i = 3$) уровень, поэтому скорости электрона на этих уровнях согласно формуле

$v_n = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \cdot \hbar} \cdot \frac{1}{n} = \frac{2,19 \cdot 10^6}{n}$ составляют, соответственно, $v_3 = 7,29 \cdot 10^5$ м/с и $v_4 = 5,48 \cdot 10^5$ м/с.

Длины волн де Бройля в этих случаях равны:

$$\lambda_3 = \frac{h}{mv_3} = \frac{6,63 \cdot 10^{-34}}{9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 7,29 \cdot 10^5} = 9,98 \cdot 10^{-10} \text{ м},$$

$$\lambda_4 = \frac{h}{mv_4} = \frac{6,63 \cdot 10^{-34}}{9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 5,48 \cdot 10^5} = 1,33 \cdot 10^{-9} \text{ м}.$$

Изменение длины волны де Бройля составляет

$$\Delta\lambda = \lambda_4 - \lambda_3 = 1,33 \cdot 10^{-9} - 9,98 \cdot 10^{-10} = 3,29 \cdot 10^{-10} \text{ м}.$$

Задача 9.4

Заряженная частица, ускоренная разностью потенциалов $U = 200$ В, имеет длину волны де Бройля 2,02 нм. Найти массу частицы, если ее заряд численно равен заряду электрона.

Решение

Кинетическую энергию заряженная частица приобретает в электрическом поле, следовательно, работа поля $eU = T = \frac{mv^2}{2} = \frac{p^2}{2m}$. Тогда импульс частицы равен $p = \sqrt{2emU}$.

$$\text{Длина волны де Бройля} \quad \lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2emU}},$$

откуда масса заряженной частицы равна

$$m = \frac{h^2}{2eU\lambda^2} = \frac{(6,63 \cdot 10^{-34})^2}{2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 200 \cdot (2,02 \cdot 10^{-12})^2} = 1,68 \cdot 10^{-27} \text{ кг.}$$

Задача 9.5

Какую наименьшую разность потенциалов надо приложить к рентгеновской трубке, чтобы получить все линии K-серии, если в качестве материала антиматериала взять медь?

Решение

Процесс получения рентгеновского излучения состоит в том, что электрон, ускоренный электрическим полем между катодом и антиматериалом (анодом) рентгеновской трубки, тормозится в материале антиматериала: при небольших значениях кинетической энергии электронов возникает тормозное рентгеновское излучение, имеющее сплошной спектр, а при больших значениях кинетической энергии электрона возникает характеристическое рентгеновское излучение, имеющее дискретный спектр.

Энергия электрона численно равна энергии испущенного кванта рентгеновского излучения, при этом, если необходимо получить всю K-серию, то

$$eU = \varepsilon = \frac{hc}{\lambda_{\text{гп}}},$$

где $\lambda_{\text{гп}}$ – длина волны граничной линии K-серии, которая называется край полосы поглощения (ее берем из таблицы в справочнике: для меди $\lambda_{\text{гп}} = 138 \text{ пм}$).

Тогда

$$U = \frac{hc}{e\lambda_{\text{гп}}} = \frac{6,63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{1,66 \cdot 10^{-19} \cdot 138 \cdot 10^{-12}} = 8,98 \cdot 10^3 \text{ В.}$$

Задача 9.6

Найти наибольшую длину волны K-серии рентгеновского излучения, даваемого трубкой с антиматериалом из железа ($Z = 26$)?

Решение

Длины волн характеристического рентгеновского излучения подчиняются закону Мозли:

$$\frac{1}{\lambda} = R(Z - \sigma)^2 \left(\frac{1}{n_i^2} - \frac{1}{n_k^2} \right),$$

Наибольшая длина волны соответствует переходу электрона с L -уровня на K -уровень, т. е. в формуле закона Мозли $n_i = 1$, $n_k = 2$, постоянная экранирования для K -серии $\sigma = 1$, а постоянная Ридберга $R = 1,1 \cdot 10^7 \text{ м}^{-1}$.

Исходя из этого

$$\frac{1}{\lambda_{K\alpha}} = R(26 - 1)^2 \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} \right) = \frac{3R \cdot 25^2}{4}.$$

Отсюда

$$\lambda_{K\alpha} = \frac{4}{3 \cdot 625 \cdot 1,1 \cdot 10^7} = 1,94 \cdot 10^{-10} \text{ м}.$$

Задача 9.7

Найти постоянную экранирования для L -серии рентгеновского излучения, если известно, что при переходе электрона в атоме вольфрама ($Z = 74$) с M - на L -оболочку испускается рентгеновское излучение с длиной волны $\lambda = 143 \text{ нм}$.

Решение

При переходе с M -оболочки ($n_k = 3$) на L -оболочку ($n_i = 2$) испускается фотон рентгеновского излучения, длина волны которого $\lambda_{M\alpha}$. По закону

Мозли

$$\frac{1}{\lambda_{M\alpha}} = R(74 - \sigma)^2 \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} \right) = \frac{5R \cdot (74 - \sigma)^2}{36},$$

$$(74 - \sigma)^2 = 4,59 \cdot 10^3,$$

откуда постоянная экранирования σ для L -серии равняется

$$\sigma = 6,25.$$

Задача 9.8

При переходе электрона в атоме с L - на K - оболочку испускается рентгеновское излучение с длиной волны $\lambda = 78,8$ нм. Какой это атом?

Решение

Переход с L - на K - оболочку описывается законом Мозли, в котором $n_i = 1$, $n_k = 2$, а $\sigma = 1$.

$$\frac{1}{\lambda_{K\alpha}} = R(Z-1)^2 \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} \right) = \frac{3R \cdot (Z-1)^2}{4},$$

$$Z-1 = \sqrt{\frac{4}{3R\lambda_{K\alpha}}} = \sqrt{\frac{4}{3 \cdot 1,1 \cdot 10^7 \cdot 78,8 \cdot 10^{-12}}} = 39,$$

откуда $Z = 40$.

Следовательно, элемент антикатада – цирконий.

Задача 9.9

Найти порядковый номер легкого элемента, у которого в спектре поглощения рентгеновского излучения разность частот K - и L - краев поглощения $\Delta\omega = 6,85 \cdot 10^{18} \text{ с}^{-1}$.

Решение

Запишем закон Мозли для краев поглощения K - и L - серий (граничных линий спектральных серий) с учетом того, что для легких элементов постоянная экранирования $\sigma = 1$:

$$\omega_K = R'(Z-1)^2 \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{\infty} \right) = R'(Z-1)^2,$$

$$\omega_L = R'(Z-1)^2 \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{\infty} \right) = \frac{1}{4} R'(Z-1)^2.$$

Разность частот

$$\Delta\omega = \omega_K - \omega_L = \frac{3}{4} R'(Z-1)^2, \text{ откуда}$$

$$Z = \sqrt{\frac{4\Delta\omega}{3R'}} + 1 = \sqrt{\frac{4 \cdot 6,85 \cdot 10^{18}}{3 \cdot 2,07 \cdot 10^{16}}} + 1 = 21 + 1 = 22.$$

Искомый элемент с $Z = 22$ – титан.

Задача 9.10

При напряжении на рентгеновской трубке $U = 30$ кВ разность между частотой коротковолновой границы сплошного рентгеновского спектра и частотой K_α равна $\Delta\omega = 3,26 \cdot 10^{19} \text{ с}^{-1}$. Определить номер элемента, из которого изготовлен антикатод.

Решение

Частота, соответствующая границе сплошного спектра тормозного рентгеновского излучения

$$\omega_{\max} = \frac{eU}{\hbar} = \frac{2\pi eU}{h}.$$

Частота K_α - фотона в характеристическом рентгеновском спектре по закону Мозли

$$\omega_{K\alpha} = R'(Z-1)^2 \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} \right) = \frac{3R'(Z-1)^2}{4}.$$

Разность частот

$$\Delta\omega = \omega_{\max} - \omega_{K\alpha} = \frac{2\pi eU}{h} - \frac{3R'(Z-1)^2}{4}.$$

Номер элемента, из которого изготовлен антикатод,

$$Z = \sqrt{\frac{4}{3R'} \left(\frac{2\pi eU}{h} - \Delta\omega \right)} + 1.$$

Подстановка числовых данных дает

$$Z = \sqrt{\frac{4}{3 \cdot 2,07 \cdot 10^{16}} \left(\frac{2\pi \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 3 \cdot 10^4}{6,63 \cdot 10^{-34}} - 3,26 \cdot 10^{19} \right)} + 1 = 29 + 1 = 30.$$

Следовательно, антикатод изготовлен из цинка.

III. КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

К9.1. Определите длину волны де Бройля для электрона, находящегося в атоме водорода на третьей боровской орбите $\left[\lambda = 2h^2 n \varepsilon_0 / m e^2 = 1 \text{ нм} \right]$

К9.2. Протон движется в однородном магнитном поле с индукцией $B = 15 \text{ мТл}$ по окружности радиусом $R = 1,4 \text{ м}$. Определите длину волны де Бройля для протона. $\left[\lambda = h / e B R = 0,197 \text{ пм} \right]$

К9.3. Заряженная частица, ускоренная разностью потенциалов $U = 500 \text{ В}$, имеет длину волны де Бройля $\lambda = 1,282 \text{ пм}$. Найти массу частицы, считая, что ее заряд равен элементарному заряду. $\left[m = h^2 / 2 e \lambda^2 U = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ м} \right]$

К9.4. Кинетическая энергия электрона равна $0,6 \text{ МэВ}$. Определите длину волны де Бройля. $\left[\lambda = hc / \sqrt{KE(KE + 2mc^2)} = 1,26 \text{ пм} \right]$

К9.5. Какую энергию необходимо дополнительно сообщить электрону, чтобы его дебройлевская длина волны уменьшилась от 100 до 50 пм ? $\left[\Delta E = 7,3 \cdot 10^{-14} \text{ Дж} = 0,45 \text{ эВ} \right]$

К9.6. При исследовании характеристического рентгеновского спектра некоторого элемента было найдено, что длина волны, соответствующая линии K_α равна $0,075 \text{ нм}$. Определить, какой это элемент? $[Z = 41, \text{ ниобий}]$

К9.7. Какую наименьшую разность потенциалов надо приложить к рентгеновской трубке с вольфрамовым ($Z = 74$) антикатодом для получения всех линий K - серии $[U = 72,4 \text{ В}]$

К9.8. При переходе электрона с M - уровня на K - уровень испускается квант энергии с длиной волны $\lambda = 67,24 \text{ пм}$. Определить какой это атом? $[Z = 40, \text{ цирконий}]$

Глава 10.

ЭЛЕМЕНТЫ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ. РАДИОАКТИВНОСТЬ

I. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

1. Состав и характеристики атомного ядра

Атомное ядро – это центральная часть атома, в котором преимущественно сосредоточена его масса. Оно имеет положительный заряд, который определяет химический элемент. Ядро состоит из элементарных частиц – протонов и нейтронов, которые называют **нуклонами** (от лат. *nucleus* – ядро). Протонно-нейтронная модель ядра была предложена советским физиком Д. Д. Иваненко (1904–1994) (рис. 10.1, а) в 1932 г. и впоследствии развита В. Гейзенбергом.



Рисунок 10.1 – Дмитрий Иваненко (а),
Джеймс Чедвик (б)

Протон был открыт Э. Резерфордом в 1919 г. в его опытах по рассеянию α -частиц веществом. Им же было предложено и название, происходящее от древнегреческого *πρῶτος*, что означает «первый, основной, первичный».

Протон (p) обладает положительным зарядом $q_p = e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл и массой $m_p = 1,6726 \cdot 10^{-27}$ кг.

В атомной физике применяют две внесистемные единицы массы:

1) **атомную единицу массы** 1 а.е.м. (u) = $1,66054 \cdot 10^{-27}$ кг = 1/12 массы нейтрального атома углерода ^{12}C ;

2) **энергетический эквивалент массы** – Каждому значению массы в соответствии с формулой Эйнштейна соответствует полная энергия $E = mc^2$. Соотношение между атомной единицей массы и ее энергетическим эквивалентом

$$1 u = 1,660539 \cdot c^2 = 1,492418 \cdot 10^{-10} = 931,494 \text{ МэВ}.$$

Используя эти единицы, массу протона можно выразить как

$$m_p = 1,007276 \text{ u} = 938,272 \text{ МэВ}.$$

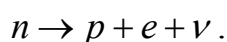
Нейтрон (n). Его электрический заряд равен нулю, а масса близка к массе протона.

$$m_n = 1,67490068 \cdot 10^{-27} = 1,00897 \text{ u} = 939,565 \text{ МэВ}.$$

Как видно из сравнения, с точностью $\sim 1\%$ массы протона и нейтрона равны одной атомной единице массы (1 u).

Нейтрон был открыт в 1932 г. английским физиком лауреатом Нобелевской премии 1935 г. Джеймсом Чедвиком (1891–1974) (рис. 10.1, б).

В свободном состоянии нейтрон нестабилен и самопроизвольно распадается, превращаясь в протон и испуская электрон и нейтрино:



Основными характеристиками атомного ядра являются зарядовое и массовое числа.

Зарядовое число Z равно количеству протонов в ядре и определяет его заряд Ze . Так как атом нейтрален, то число Z определяет и число электронов в атоме. От числа же электронов зависит их распределение по состояниям в атоме, от которого, в свою очередь, зависят химические свойства атома. Следовательно, заряд ядра определяет особенности данного химического элемента, т. е. определяет число электронов в атоме, конфигурацию их электронных оболочек, величину и характер внутриатомного электрического поля.

Массовое число A определяет число нуклонов в ядре. Число нейтронов $N = A - Z$.

Символически эти характеристики ядра обозначают так: ${}_Z^A X$.

Например, ${}_1^2 H$, ${}_2^4 He$, ${}_{92}^{238} U$.

В соответствии с общепринятой терминологией конкретные атомы с данным числом протонов и нейтронов в ядре называются **нуклидами**.

Изотопы – ядра с одинаковым зарядовым числом Z , но различным массовым числом A .

Например, изотопы урана: ${}_{92}^{235} U$ и ${}_{92}^{238} U$; изотопы водорода: ${}_1^1 H$ – обычный водород – протий, ${}_1^2 H$ – тяжелый водород – дейтерий (D), ${}_1^3 H$ – тритий (T).

Изобары – ядра с одинаковым массовым числом A .

Например, изотопы аргона и кальция $^{40}_{18}\text{Ar}$ и $^{40}_{20}\text{Ca}$.

Изотоны – ядра с одинаковым количеством нейтронов $N = A - Z$.

Например, изотопы углерода и азота $^{13}_6\text{C}$ и $^{14}_7\text{N}$.

Изомеры – ядра с одинаковыми Z и A , но различными периодами полураспада. Например, у брома $^{80}_{35}\text{Br}$ имеются два изомера с периодами полураспада 18 мин и 4,4 часа.

Размеры атомного ядра зависят от его массового числа. Средняя плотность нуклонов для ядер с $A > 10$ практически одинакова, объем пропорционален массовому числу, а линейный размер $r \approx 1,3 \cdot 10^{-15} \cdot A^{1/3}$ м = $= 1,3 \cdot A^{1/3}$ Ф (Ф – Ферми – внесистемная единица длины, $1 \text{ Ф} = 1 \cdot 10^{-15}$ м). Плотность ядерного вещества чрезвычайно велика в сравнении с плотностью обычных веществ и составляет $\sim 10^{17}$ кг/м³.

2. Ядерные силы. Дефект массы и энергия связи ядра

В атомных ядрах между нуклонами действуют сильные связи, которые называют ядерными силами и которые обладают следующими свойствами.

1) Ядерные силы являются **короткодействующими**: при увеличении расстояния между нуклонами действие ядерных сил быстро уменьшается и на расстоянии более $2,2 \cdot 10^{-15}$ м становятся практически равными нулю. На расстоянии $1,5 \cdot 10^{-15}$ м притяжение сменяется отталкиванием. Длина действия ядерных сил $(1,5 - 2) \cdot 10^{-15}$ м, благодаря чему ядра являются достаточно устойчивыми образованиями.

2) Ядерные силы обладают **зарядовой независимостью**, они одинаково действуют между частицами с положительным, отрицательным зарядом и нейтральными частицами. Это означает, что они имеют неэлектростатическую природу.

3) Ядерные силы зависят от взаимной ориентации взаимодействующих нуклонов, а именно, от ориентации спинов. Например, ядро тяжелого водорода-дейтерия (дейтрон ^2H) образуется из нейтрона и протона только в том случае, если их спины параллельны друг другу.

4) Ядерные силы **не являются центральными**; их потенциал не обладает сферической симметрией.

5) Ядерные силы обладают свойством **насыщения**. Это свойство проявляется в том, что нуклоны в ядре взаимодействуют только с ограниченным числом ближайших к ним соседних нуклонов. Свойством насыщения объясняется зависимость энергии связи ядра от массового числа.

Массу ядер можно с большой точностью определить методами масс-спектрометрического анализа, в которых с помощью магнитных и электрических полей пучки заряженных частиц разделяются в соответствии со своими удельными зарядами q/m . Было установлено, что масса ядра $m_{\text{я}}$ меньше суммы масс входящих в него частиц. Поскольку всякому изменению массы соответствует изменение энергии по формуле $\Delta E = \Delta mc^2$, то это означает, что при образовании и делении ядра должна выделяться или затрачиваться некоторая энергия.

Дефектом массы Δm ядра называется величина

$$\Delta m = [Zm_p + (A - Z)m_n] - m_{\text{я}} \cong [Zm_H + (A - Z)m_n] - m_a, \quad (10.1)$$

где m_p , m_n и $m_{\text{я}}$ – массы протона, нейтрона и ядра, соответственно.

Энергией связи $E_{\text{св}}$ ядра называется работа, которую надо затратить, чтобы разделить данное ядро на составляющие части и удалить их друг от друга на такое расстояние, на котором они бы практически не взаимодействовали.

$$E_{\text{св}} = c^2 \{ [Zm_p + (A - Z)m_n] - m_{\text{я}} \}. \quad (10.2)$$

Поскольку в справочной литературе приводятся не массы ядер, а массы нейтральных атомов, выраженные в атомных единицах массы u , то в формуле (10.2) можно сделать замены: массы протона на массу нейтрального атома водорода ${}^1_1\text{H}$ $m_p = m_H$, а массы ядра – на массу атома $m_{\text{я}} = m_a$. Тогда

$$E_{\text{св}} = c^2 \{ [Zm_H + (A - Z)m_n] - m_a \}. \quad (10.3)$$

Учитывая, что при дефекте массы $\Delta m = 1u$ энергия связи равна $\sim 931,5 \text{ МэВ}/u$, энергия связи ядра

$$E_{\text{св}} \cong \Delta m(u) \cdot 931,5 (\text{МэВ}/u). \quad (10.4)$$

Энергия связи, приходящаяся на один нуклон, т. е. $E_{св}/A$, называется **удельной энергией** связи нуклонов в ядре.

Удельная энергия зависит от массового числа (рис. 10.2). Сильнее всего связаны нуклоны в ядрах с $A = 50 - 60$ (т. е. от *Cr* до *Ni*). С ростом A удельная энергия связи уменьшается и для самого тяжелого природного элемента – урана – составляет 7,5 МэВ/нуклон. Такая зависимость удельной энергии от массового числа делает энергетически возможными два процесса получения ядерной энергии:

- 1) **деление** тяжелых ядер на несколько более легких;
- 2) **слияние** (синтез) легких ядер в одно ядро.

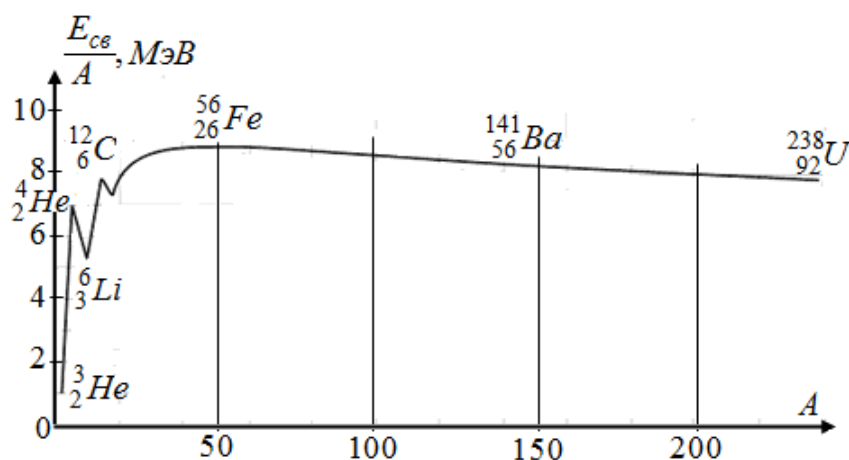


Рисунок 10.2 – Зависимость удельной энергии связи от массового числа

Оба процесса сопровождаются выделением большого количества энергии (для первого ~ сотен МэВ, для второго ~ десятков МэВ). Например, если соединить легкие ядра в более тяжелое, например, ядро дейтерия ${}^2_1\text{H}$ и ядро трития ${}^3_1\text{H}$ в ядро гелия ${}^4_2\text{He}$, то выделится энергия, равная 17,6 МэВ (на один нуклон приходится энергия, равная 3,5 МэВ). Если осуществить деление ядра урана ${}^{235}_{92}\text{U}$ на два ядра, близких по массовому числу к *Fe*, то при каждом таком делении выделится энергия равная 200 МэВ, а на один нуклон приходится энергия, равная 1,25 МэВ.

3. Радиоактивность. Типы радиоактивных излучений.

Закон радиоактивного распада

В 1886 г. французский ученый Анри Беккерель (1852–1908) (рис. 10.3, а), работая с солями урана, обнаружил почернение эмульсии фотопластинки, которое связал с неизвестным излучением, источником которого являлся уран. Позже аналогичное излучение Мария Склодовская-Кюри (1867–1934) (рис. 10.3, б), обнаружила у препарата тория. Переработав вручную тонны урановой руды, Мария Кюри вместе с мужем Пьером Кюри (1859–1906) (рис. 10.3, в) в 1898 г. открыли еще два радиоактивных элемента, которые были источниками аналогичного излучения и которые они называли «полонием» в честь родины М. Склодовской – Польши, и «радием», что в переводе с латыни означает «лучистый». Обнаруженное излучение было названо **радиоактивным излучением**, а само явление – **радиоактивностью**. За работы по изучению радиоактивности Анри Беккерель и супруги Кюри в 1903 г. получили Нобелевскую премию по физике, а Мария Склодовская-Кюри в 1911 г. еще и Нобелевскую премию по химии.



Рисунок 10.3 – Анри Беккерель (а), Мария Склодовская-Кюри (б), Пьер Кюри (в), Ирен Жолио-Кюри (г), Фредерик Жолио-Кюри (д)

Радиоактивностью называется самопроизвольное превращение одних атомных ядер в другие, сопровождающиеся испусканием элементарных частиц. Радиоактивность, существующая в природных условиях, называется **естественной**, а полученная посредством ядерных реакций – **искусственная**. Искусственную радиоактивность открыли и исследовали супруги Жолио-Кюри Ирен (1897–1956) (рис. 10.3, г) и Фредерик (1900–1958) (рис. 10.3, д), получившие за это Нобелевскую премию по химии 1935 г. Было показано, в частности, что между естественной и искусственной радиоактивностями нет никакой принципиальной разницы, а процессы радиоактивного превращения идут по одним и тем же законам.

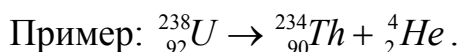
Радиоактивное излучение бывает трех типов: α , β и γ -излучения.

1. Альфа-распад – самопроизвольное испускание ядром α -частицы (ядра нуклида ${}^4_2\text{He}$).



где X и Y – символы материнского и дочернего ядер, соответственно.

α -распад обычно сопровождается испусканием дочерним ядром γ -лучей. Кинетическая энергия вылетающих α -частиц порядка нескольких МэВ. В воздухе при нормальном давлении пробег α -частиц составляет несколько сантиметров (их энергия расходуется на образование ионов на своем пути). Это излучения отклоняется электрическим и магнитным полем (поскольку α -частицы заряжены положительно), обладает высокой ионизирующей и малой проникающей способностью (поглощается слоем алюминия толщиной ~ 50 мкм).



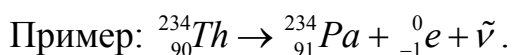
α -частица возникает только в момент радиоактивного распада ядра. Покидая ядро, ей приходится преодолевать потенциальный барьер, высота которого превосходит ее энергию. Это происходит благодаря туннельному эффекту.

2. Бета-распад – самопроизвольный процесс, при котором ядро превращается в другое ядро с тем же массовым числом A , но с зарядовым числом Z , отличающимся от исходного на ± 1 . Этот распад связан с тем, что происходит испускание электрона (позитрона) или захват электрона из оболочки атома.

1) **электронный β^- -распад**: ядро испускает электрон и его зарядовое число увеличивается на единицу.



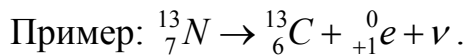
При β^- -распаде испускается маленькая частица, называемая антинейтрино $\tilde{\nu}$, и могут испускаться γ -лучи.



2) **позитронный β^+ - распад**: ядро испускает *позитрон* и его зарядовое число уменьшается на единицу.



Позитрон – античастица электрона, имеет заряд $+e$ и массу, равную массе электрона. Кроме того, при β^+ - распаде испускается нейтрино ν , и могут испускаться γ - лучи.



β - излучение отклоняется электрическим и магнитным полями, его ионизирующая способность значительно (\sim в 100 раз) меньше, чем у α - частиц. Оно поглощается слоем алюминия толщиной ~ 2 мм.

При β - распадах выделяются частицы нейтрино и антинейтрино. Эти очень маленькие частицы (нейтрино – от итал. «маленькая нейтральная частичка») с нулевым электрическим зарядом были теоретически предсказаны В. Паули в 1930 г. Экспериментально их удалось обнаружить спустя десятилетия исследователям из США: в 1953 г. – Ф. Райнесу (1918–1998) и К. Козну (1919–1974) – антинейтрино (Нобелевская премия 1995 г.), а в 1962 г. – М. Ледерману (род. 1922 г.), М. Шварцу (1932–2006) и Дж. Стейнбергеру (род. 1921 г.) – нейтрино (Нобелевская премия 1988 г.).

Гипотеза о существовании нейтрино позволила американскому физiku лауреату Нобелевской премии 1938 г. Энрико Ферми (1901–1954) (рис. 10.4, а) сформулировать теорию β^- - распада и объяснить, откуда берется электрон в ядре. Ферми предположил, что в ядре один из нейтронов распадается на протон и электрон с одновременным образованием антинейтрино:

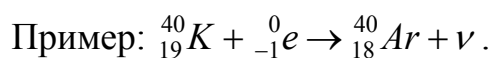


В этом процессе выполняются законы сохранения электрических зарядов, импульса и массовых чисел. Кроме того, данное превращение энергетически возможно, так как масса покоя нейтрона превышает массу атома водорода, т. е. протона и электрона вместе взятых. Данной разности в массах соответствует энергия, равная 0,782 МэВ. За счет этой энергии может происходить самопроизвольное превращение нейтрона в протон; энергия распределяется между электроном и антинейтрино.

Аналогичным образом записывается реакция, сопутствующая β^+ -распаду, когда один из протонов превращается в нейтрон, испуская при этом позитрон и нейтрино:



3) **электронный захват** (K -захват): ядро поглощает один из K -электронов (реже – один из L или M -электронов – тогда L -захват или M -захват).



При K -захвате место в электронной оболочке, освобожденное захваченным электроном, заполняется электронами из вышерасположенных оболочек. При этом испускаются рентгеновские лучи. Это явление и позволило открыть в 1937 г. этот тип радиоактивного превращения американскому физiku лауреату Нобелевской премии 1968 г. Луису Альваресу (1911–1988).

Уравнения (10.5) – (10.8) являются выражениями **правила смещения**, которое позволяет установить, какое ядро возникает в результате распада материнского ядра.

3. Гамма-излучение. Испускание возбужденным ядром при переходе его в нормальное состояние γ -квантов коротковолнового электромагнитного излучения, имеющих энергию от 10 кэВ до 5 МэВ и длину волны $\lambda < 10^{-10}$ м. Спектр этого излучения дискретен, что свидетельствует о дискретности энергетических уровней ядра. γ -излучение не отклоняется электрическим и магнитным полями, обладает слабой ионизирующей способностью и очень большой проникающей способностью.

Возникающие в результате радиоактивного распада ядра могут быть, в свою очередь, тоже радиоактивными, что приводит к образованию цепочки, или ряда радиоактивных превращений. Процесс заканчивается образованием стабильного (нерадиоактивного) элемента, Совокупность элементов, образующих цепочку, называют радиоактивным семейством.

Теория радиоактивного распада строится на предположении, что самопроизвольный распад атомных ядер подчиняется статистическим законам. Поскольку отдельные радиоактивные ядра распадаются независимо друг

от друга, то можно полагать, что число ядер dN , распавшихся в среднем за интервал времени от t до $t + \Delta t$, пропорционально промежутку времени dt и числу N нераспавшихся ядер к моменту времени t :

$$dN = -\lambda N dt. \quad (10.11)$$

Знак «минус» взят для того, чтобы показать, что dN – приращение числа нераспавшихся ядер, т. е. общее число радиоактивных ядер в процессе распада уменьшается, λ – постоянная для каждого радиоактивного вещества величина, называемая **постоянной распада**.

Если разделить переменные

$$\frac{dN}{N} = -\lambda dt \quad (10.12)$$

и проинтегрировать полученное выражение, то получим **закон радиоактивного распада**:

$$N = N_0 e^{-\lambda t}, \quad (10.13)$$

где N_0 – **исходное** количество ядер в начальный момент, N – количество **нераспавшихся** (оставшихся) ядер в момент времени t .

Количество ядер, **распавшихся** за время t , определяется выражением

$$N_0 - N = N_0 (1 - e^{-\lambda t}). \quad (10.14)$$

Период полураспада T – время, за которое распадается половина первоначального количества ядер. Из $N_0/2 = N_0 e^{-\lambda T}$ выразим $e^{\lambda T} = 2$, откуда

$$T = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0,693}{\lambda}. \quad (10.15)$$

Среднее время жизни τ радиоактивного ядра

$$\tau = \frac{1}{\lambda}, \quad T = \tau \cdot \ln 2 = 0,693\tau. \quad (10.16)$$

Активностью A нуклида в радиоактивном источнике называется число распадов, происходящих в ядрах образца за 1 секунду

$$A = \lambda N. \quad (10.17)$$

Активность, связанная с количеством ядер в радиоактивном источнике, изменяется со временем по закону

$$A = A_0 e^{-\lambda t} . \quad (10.18)$$

Единицей активности в СИ является Беккерель (Бк).

1 Бк равен активности нуклида, при которой за 1 секунду происходит 1 распад. Часто используется и внесистемная единица – Кюри (Ки).

$[A] = 1$ Беккерель = 1 Бк = 1 распад/с; 1 Кюри = 1 Ки = $3,7 \cdot 10^{10}$ Бк.

4. Ядерные реакции

Ядерная реакция – это процесс сильного взаимодействия атомного ядра с элементарной частицей или с другим ядром; процесс, сопровождающийся преобразованием ядер. Это взаимодействие возникает благодаря действию ядерных сил при сближении частиц до расстояний порядка 10^{-15} м.

Наиболее распространенным типом ядерных реакций является процесс, происходящий по схеме

$$x + X \rightarrow Y + y , \quad (10.19)$$

где X – исходное ядро-мишень, Y – конечное ядро отдачи, x – частица-снаряд, y – частица-продукт. В роли частицы-снаряда чаще всего выступают нейтрон n , протон p , дейтрон 2_1H , α – частица или γ – квант.

Ядерные реакции могут происходить как с выделением, так и с поглощением энергии.

Если E_0 и E'_0 – суммы энергий покоя исходных частиц и продуктов реакции, а K , K' – суммарные кинетические энергии исходных частиц и продуктов реакции, то по закону сохранения энергии

$$E_0 + K = E'_0 + K' . \quad (10.20)$$

Отсюда убыль суммарной энергии покоя $(E_0 - E'_0)$ равна приращению суммарной кинетической энергии $(K' - K)$.

Энергией реакции называют величину Q , которая равна

$$Q = E_0 - E'_0 = K' - K . \quad (10.21)$$

Реакции с $Q > 0$ – *экзоэнергетические* (выделение энергии), с $Q < 0$ – *эндоэнергетические* (с поглощением энергии).

Это же можно записать через массы или дефекты масс нуклидов:

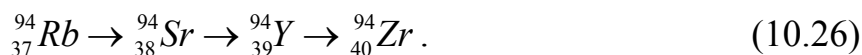
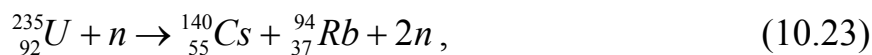
$$Q = \begin{cases} (m_a - m_x) - (m_b - m_y) \\ (\Delta_a + \Delta_x) - (\Delta_b + \Delta_y) \end{cases} \quad (10.22)$$

Немецкие химики Отто Ган (1879–1968) (рис. 10.4, б) и Фриц Штрассман (1902–1980) (рис. 10.4, в) в декабре 1938 г. обнаружили, что при облучении урана нейтронами образуются элементы из середины периодической системы Менделеева (барий, лантан). Объяснение этому явлению было дано Лизой Мейтнер (1878–1968) (рис. 10.4, г) и Отто Фришем (1904–1979) (рис. 10.4, д), предположившими, что ядро урана, захватившее нейтрон, делится на две приблизительно равные части, называемые *осколками деления*. Отто Ган за свои работы по открытию деления ядер урана был удостоен Нобелевской премии по химии 1944 г., которую получил двумя годами позже.



Рисунок 10.4 – Энрико Ферми (а), Отто Ган (б), Фриц Штрассман (в), Лиза Мейтнер (г), Отто Фриш (д)

Лиза Мейтнер и Отто Фриш предположили, что процесс деления ядра урана идет по следующей схеме до тех пор, пока не образуются стабильные продукты реакции – церий и цирконий:



В 1940 г. советские ученые Георгий Флеров (1913–1990) и Константин Петржак (1907–1998) установили, что ядра урана способны и к *самопроиз-*

вольному (спонтанному) делению. При всех прочих превращениях атомное ядро испускает частицы, которые существенно меньше его по массе и размерам. При спонтанном делении ядро атома делится, грубо говоря, на две равные части. Эта особенность спонтанного деления позволяет получить совершенно новую и очень ценную информацию об атомном ядре.

Все эти и другие работы, проводимые в различных лабораториях целого ряда стран, привели к пониманию, что существует принципиальная возможность извлечения огромной энергии в процессе деления изотопов урана и некоторых других элементов (${}^{235}_{92}\text{U}$, ${}^{239}_{94}\text{Pu}$, ${}^{233}_{92}\text{U}$ и др.). Само по себе деление ядра представляет собой экзотермическую реакцию, сопровождающуюся выделением значительного количества тепла. При делении образуются два (иногда больше) ядра, испускаются нейтроны и некоторые другие частицы. При делении урана ${}^{235}_{92}\text{U}$, которое вызвано столкновением с нейтроном, освобождается 2 или 3 нейтрона. Нейтроны имеют энергии порядка 2 МэВ и скорости $\sim 2 \cdot 10^7$ м/с. Время, протекающее между испусканием нейтрона и захватом его новым делящимся ядром, очень мало, поэтому процесс протекает очень быстро. При благоприятных условиях эти нейтроны могут попасть на другие ядра урана и вызвать их деление. На этом этапе появляется от 4 до 9 нейтронов, которые в свою очередь вызывают распады новых ядер урана. Такой лавинообразный процесс называется **цепной реакцией**.

Цепная реакция в уране может быть осуществлена двумя способами. Для практического осуществления цепной реакции по первому типу (атомная бомба) необходимо выполнение целого ряда условий:

- 1) поскольку в природном уране содержится только 0,72 % изотопа ${}^{235}_{92}\text{U}$, поэтому необходимо **обогащение** природного урана;
- 2) необходимо, чтобы масса урана ${}^{235}_{92}\text{U}$ была больше некоторого критического значения (т. н. **критическая масса**), ибо в противном случае большинство испущенных нейтронов вылетает, не вызывая деления;
- 3) соединение двух частей, суммарная масса которых больше критической, должно производиться очень *быстро* и очень *плотно*, иначе ядерный заряд разлетится на части до того, как успеет прореагировать основная масса делящегося вещества.

Цепная реакция второго типа используется в **ядерных реакторах**, где в качестве делящегося вещества используется природный уран, обогащенный изотопом ${}^{235}_{92}\text{U}$. Делящееся вещество располагают небольшими пор-

циями, между которыми помещают **замедлители** (вещества, в которых замедляются нейтроны – графит, бериллий, ядра тяжелого водорода дейтерия – дейтоны). Устройство, автоматически управляющее стержнями-замедлителями, позволяет поддерживать развиваемую в реакторе мощность на заданном уровне. Промышленные реакторы применяются для двух целей: для получения делящегося материала для атомных бомб и на атомных электростанциях. На АЭС энергия, выделяемая в активной зоне реактора, снимается теплоносителем (вода, щелочные металлы) и в теплообменнике передается воде, превращая ее в пар, вращающий турбину.

Еще одним типом ядерных реакций является **ядерный синтез** – слияние легких ядер в одно ядро, сопровождающееся выделением огромного количества энергии. Поскольку для синтеза ядер необходимы очень высокие температуры, то этот процесс называется **термоядерной реакцией**. Реакции, происходящие с участием дейтерия и трития, носят резонансный характер. Именно они используются в так называемой **водородной бомбе**, запалом которой служит атомная бомба, при взрыве которой достигаются температуры $\sim 10^7$ К. Реакция синтеза дейтона (${}^2_1\text{H}$) и ядра трития (${}^3_1\text{H}$)



сопровождается выделением $\sim 17,6$ МэВ энергии, что составляет $\sim 3,5$ МэВ на 1 нуклон (деление урана $\sim 0,85$ МэВ на 1 нуклон). В бомбе термоядерные реакции носят неконтролируемый характер. Осуществление же контролируемого термоядерного синтеза может дать огромные возможности для получения энергии.

5. Применение радиоактивных изотопов.

Биологическое действие ионизирующих излучений

Радиоизотопы широко применяются в биологии, медицине, химии, технике и промышленности, а также в:

1) **Авторадиографии** – метод изучения распределения радиоактивных веществ в исследуемом объекте наложением на объект чувствительной к радиоактивным излучениям фотоэмульсии. Содержащиеся в объекте радиоактивные вещества как бы сами себя фотографируют (отсюда и название). Методом авторадиографии широко пользуются в физике и технике, в биологии и медицине – всюду, где применяются изотопные индикаторы, так называемые **«меченые атомы»**.

2) Активационном анализе – методе, основанном на активации атомных ядер и исследовании радиоактивного излучения, возникающего вследствие изменения нуклонного состава или энергетического состояния ядер. Позволяет определить малые содержания элементов в различных объектах и проводить массовые экспрессные анализы образцов. Применяется для определения примесей в сверхчистых материалах (в реакторостроении и электронной промышленности), содержания микроэлементов в биологических объектах при экологических и медицинских исследованиях, а также в археологии и криминалистике, успешно используется при поиске полезных ископаемых, для контроля технологических процессов и качества выпускаемой продукции.

3) Сельском хозяйстве и пищевой промышленности. Радиоактивное излучение используется для целей селекции, борьбы с вредителями, для стерилизации, консервирования, увеличения сроков хранения и обеззараживания пищевых продуктов и сырья, для диагностики заболеваний животных, отслеживания распределения удобрений.

4) Медицине. Радиоизотопы используются как для диагностики и лечения.

а) **диагностика «in vitro»** (лат. – в стекле – вне организма) проводится для определения предрасположенности организма к определенным заболеваниям и ранней диагностики различных патологий, выявления изменений в раковых клетках и опухолевых маркеров, определения месторасположения гормонов, витаминов и лекарственных препаратов, нарушений обмена веществ, эндокринных расстройств и инфекций.

б) **диагностика «in vivo»** (лат. – в живом – внутри организма) основана на использовании радиофармпрепаратов, которые вводятся в организм пациента и воздействуют на определенные ткани или органы (напр., легкие или сердце), не нарушая их функции и не повреждая их. Местонахождение радионуклида визуализируется при помощи специального детектора, который преобразует полученные данные в двумерные или трехмерные изображения отдельной ткани или органа.

в) **радиотерапия** или **лучевая терапия** – это область медицины, в которой ионизирующие излучения используются для лечения онкологических заболеваний путем воздействия на определенные клетки с целью их уничтожения. В *дистанционной* лучевой терапии определенные части тела пациента облучаются одним или несколькими пучками излучения. Пучок формируется таким образом, чтобы свести к минимуму облучение здоровых клеток и в то же время либо остановить распространение раковых клеток, либо уничтожить их.

При *брахитерапии* источники излучения помещаются внутрь той части тела пациента, где необходимо лечение, или рядом с ней. Эта методика позволяет лечить опухоли высокими дозами локализованного излучения, снижая при этом вероятность ненужного облучения смежных здоровых тканей.

Системная радионуклидная терапия (радиоизотопная терапия) может применяться для борьбы с рядом заболеваний, в том числе раком, заболеваниями крови и заболеваниями, поражающими щитовидную железу. В этом случае небольшое количество радиоактивного материала вводится в организм внутривенно, перорально, внутримышечным или другим способом и целенаправленно воздействует на какую-либо часть тела или орган для их лечения.

5) Радиационном датировании для определения возраста объектов, при котором исследуется содержание в нем радиоактивных изотопов с известными периодами полураспада.

а) уран (торий) - свинцовый метод

Этот метод – один из самых старых и хорошо разработанных способов радиоизотопного датирования, признанный в настоящее время самым надёжным методом датирования для образцов с возрастом порядка сотен миллионов лет. Позволяет датировать даже образцы, близкие по возрасту к Земле, вследствие большого периода полураспада используемых изотопов урана и тория. Используют следующие превращения:



Использование двух изотопов урана, распадающихся до разных изотопов свинца, даёт возможность определить возраст объекта даже в случае потери им некоторой части свинца.

б) свинец - свинцовый метод

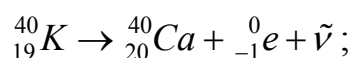
Этот метод обычно используется для определения возраста образцов, состоящих из смеси минералов. Он хорошо подходит для датировки метеоритов, а также земных пород, испытавших недавнюю потерю урана. Метод основан на измерении содержания 3 изотопов свинца: ${}_{82}^{206}\text{Pb}$ (образуется при распаде ${}_{92}^{238}\text{U}$) (образуется при распаде ${}_{92}^{235}\text{U}$) и ${}_{82}^{204}\text{Pb}$ (нерадио-генный).

Свинец - свинцовым методом было определено время формирования планет Солнечной системы, в том числе, и возраст Земли. Это впервые сделал американский геохимик Клэр Кэмерон Паттерсон (1922–1995) в 1956 г. при исследовании метеоритов разных типов.

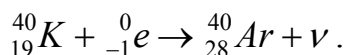
в) калий - аргоновый метод

В этом методе используется распад изотопа $^{40}_{19}\text{K}$, который составляет 0,012 % природного калия. Он распадается в основном двумя способами:

- β^- - распад (вероятность 89,28 %, период полураспада $T = 1,97$ млрд. лет)



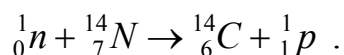
- K- захват (вероятность 10,72 %, период полураспада $T = 11,973$ млрд. лет)



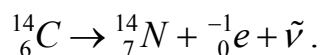
Период полураспада $^{40}_{19}\text{K}$ с учетом обоих путей распада равен 1,25 млрд. лет. Это позволяет датировать и образцы с возрастом, равным возрасту Земли, и образцы с возрастом в сотни, а иногда и десятки тысяч лет.

а) радиоуглеродный метод

Этот метод, называемый также радиоуглеродное датирование, был разработан американским ученым, лауреатом Нобелевской премии 1960 г. по химии Уиллардом Либби в 1949 г. Он основывается на том, что в растениях всегда имеется β^- - радиоактивный изотоп углерода $^{14}_6\text{C}$ с периодом полураспада $T = 5730$ лет. Он образуется в атмосфере Земли в небольшом количестве из азота под действием нейтронов, возникающих за счет ядерных реакций, вызванных быстрыми частицами в составе космических лучей:



Соединяясь с кислородом, этот углерод образует углекислый газ, поглощаемый растениями, а через них и животными. После гибели организма пополнение его радиоактивным углеродом прекращается, а его имеющееся количество убывает за счет радиоактивных процессов.



Определяя процентное содержание радиоактивного углерода в органических остатках, можно определить их возраст, если он лежит в пределах от 1000 до 50000 и даже до 100000 лет. Таким методом были определены возрасты многих археологических объектов (египетских мумий, остатков доисторических костров, наскальных рисунков, рукописей Мертвого моря, Туринской плащаницы и пр.)

6. Биологическое действие ионизирующих излучений.

Дозиметрические величины и единицы их измерения

Ионизирующие излучения оказывают сильное поражающее воздействие на живые существа. Это поражение проявляется как на уровне молекул и клеток, так и на уровне отдельных органов и всего организма. При больших дозах организм гибнет, при меньших – возникает лучевая болезнь.

Действие радиации может быть **прямым** (когда частицы или γ -фотоны непосредственно воздействуют на молекулы) или **косвенным** (если в реакции с молекулами вступают продукты радиолиза воды, содержащейся в тканях).

Преобладающим считают прямое действие. Вследствие ионизации повреждаются молекулы белков, нуклеиновых кислот и других клеточных структур. В них разрываются связи (выбиваются электроны, ответственные за связь между отдельными частями молекул), образуются сшивки, происходит радиационное окисление и т. д. При высоких дозах облучения сложные органические молекулы превращаются в короткие обрывки и клубки. Молекулы ферментов теряют свою биологическую активность, нарушается обмен веществ. Наиболее чувствительным к облучению является ядро клетки. При его поражении нарушается способность клетки к делению, нарушается синтез белков и нуклеиновых кислот, разрушается генная структура хромосом. Это ведет к потере жизнеспособности клеток или вызывает резкие наследственные изменения – мутации.

Особенно чувствительны к радиации быстро делящиеся клетки – кроветворные органы (костный мозг, селезенка, лимфатические железы), половые и вилочковая железы, слизистая оболочка кишечника. После облучения уменьшается количество лейкоцитов и лимфоцитов в крови. С другой стороны, высокая чувствительность к радиации быстро делящихся клеток злокачественных опухолей используется для лечения онкологических заболеваний. Наименее чувствительны к радиации клетки с медленной сменой поколений (нервная, мышечная и костная ткани).

Дозиметрия представляет собой совокупность методов измерения и/или расчета дозы ионизирующего излучения, основанных на количественном определении изменений, произведенных в веществе или в живом организме излучением (радиационных эффектов).

Поглощенная доза D_0 – энергия ионизирующего излучения, поглощенная единицей массы вещества за время облучения. Она определяет ионизационные эффекты, производимые излучением в веществе. Доза, поглощенная за единицу времени, называется **мощностью дозы**. Единица поглощенной дозы – 1 **Грей** – та доза облучения, при которой облученному веществу массой 1 кг передается энергия ионизирующего излучения равная 1 Дж.

Экспозиционная доза (доза облучения) оценивается по ионизирующему действию излучения на воздух. За единицу дозы облучения принят 1 **Кл/кг** – та экспозиционная доза фотонного излучения, при которой суммарный заряд ионов одного знака, производимых в 1 кг облученного воздуха, равен 1 Кл.

Раньше экспозиционная доза выражалась в **Рентгенах** (Р), а поглощенная доза в **радах** (рад – radiation absorbed dose):

$$1 \text{ Р} = 2,58 \cdot 10^{-4} \text{ Кл/кг}; 1 \text{ рад} = 0,01 \text{ Гр}.$$

Опыт показывает, что действие ядерных излучений на ткани живого организма определяется не только дозой облучения, но и природой ионизирующих частиц. Тяжелые частицы (α - частицы, нейтроны, протоны, быстрые ионы) производят больше физиологических нарушений, чем легкие (β -, γ -, РГ- лучи). Особенно опасны сильно проникающие потоки нейтронов. Исходя из этого, для оценки биологического воздействия учитывают эффективность соответствующего вида излучения.

Эквивалентная доза (биологическая доза) $D_{\text{е}}$ – произведение поглощенной дозы D_0 на коэффициент K :

$$D_{\text{е}} = D_0 \cdot K,$$

где K – коэффициент, определяемый из опыта и называемый *коэффициентом качества излучения* или *относительной биологической эффективностью* (ОБЭ). Он показывает, во сколько раз действие данного излучения на живую ткань превышает действие γ - или РГ- лучей (табл. 10.1).

Таблица 10.1 – Коэффициенты качества излучения

Вид излучения	Коэффициент качества излучения K
β -, γ -, РГ-излучение	1
Медленные нейтроны	5
Быстрые нейтроны	10
Протоны	10
α - частицы	20
Осколки деления	20

Эквивалентная доза измеряется в *Зивертах* и *бэрах* (биологический эквивалент рентгена): 1 Зв = 100 бэр, 1 бэр = 1 rem (rad equivalent for men) (табл. 10.2).

Таблица 10.2 – Пересчет доз излучения

Величина	Система	Единица	Пересчет в
Экспозиционная доза	СИ	Кл/кг	поглощенную $1 \text{ Р} \approx 0,0091 \text{ Гр} \approx 0,96 \text{ рад}$
	Внесистемная	Р	эквивалентную $1 \text{ Гр} \approx 0,00913 \text{ Зв} \approx 0,91 \text{ бэр}$
Поглощенная доза	СИ	Гр	экспозиционную $1 \text{ Гр} = 100 \text{ рад} \approx 110 \text{ Р}$
	Внесистемная	рад	эквивалентную $1 \text{ Гр} = 1 \text{ Зв} = 100 \text{ бэр}$
Эквивалентная доза	СИ	Зв	экспозиционную $1 \text{ Зв} \sim 110 \text{ Р}$
	Внесистемная	бэр	поглощенную $1 \text{ Зв} = 100 \text{ бэр} = 1 \text{ Гр}$

Облучение, которому может подвергнуться организм, разделяют на *внешнее* (от внешних источников) и *внутреннее* (от радиоактивных источников, попавших внутрь организма, напр., $^{12}_6\text{C}$, $^{40}_{19}\text{K}$, $^{226}_{88}\text{Ra}$).

Дозиметрические приборы, которые выпускаются в настоящее время, позволяют измерять дозу и мощность эквивалентной дозы. Но до сих можно встретить приборы, которые измеряют дозу и мощность экспозиционной

дозы в единицах Рентгенах и Рентгенах/час (или производных единицах), соответственно. С погрешностью до 5 % можно считать, что экспозиционная доза в рентгенах и эквивалентная доза рентгеновского и гамма-излучения в бэр совпадают. Таким образом, чтобы перевести показания такого прибора в эквивалентную дозу можно воспользоваться приближенным соотношением: $1 \text{ Зв} = 100 \text{ Р}$.

Естественный фон радиации (космические лучи, радиоактивность окружающей среды и человека) составляет в среднем 25 мКл/кг в год. Международная комиссия радиационной защиты установила для лиц, работающих с излучением, предельную допустимую дозу 1,3 мКл/кг в год. Ниже в таблице 10.3 приведены средние эквивалентные дозы и влияние организма человека на различные дозы облучения (табл. 10.4).

Таблица 10.3 – Эквивалентные дозы от различных источников радиации

	Источники радиации	Эквивалентная доза, мЗв
Естественные	Космические лучи	0,4
	Воздух	0,02
	Почва, грунт	0,4
Антропогенные	Рентгеновское обследование	1
	Монитор компьютера, телевизор	0,1

Таблица 10.4 – Действие радиации на организм человека

Доза, мКл/кг	Действие
0–5	Явных повреждений нет
5–12,5	Легкое изменение состава крови
12,5–25 (критическая доза)	Изменение состава крови, усталость, плохое самочувствие
25–50	Возможна потеря трудоспособности
50–100	Потеря трудоспособности, возможна смерть
100 (полулетальная доза)	Смертность 50 % через 30 дней после облучения
150 (летальная доза)	Смертность около 100 %

Защита от ионизирующих излучений:

1) α - частицы хорошо поглощаются тонким слоем вещества (в том числе воздуха). Опасаться следует попадания α - активных веществ внутрь организма (с воздухом, пищей), а также тормозного РГ- излучения, возбуждаемого взаимодействием α - частиц с веществом.

2) Для защиты от γ - и РГ- излучения используют толстые поглощающие экраны из свинца, железа, бетона и кирпича.

3) Поскольку нейтроны, сильно проникая в вещество, возбуждают в нем наведенную α -, β - и γ - радиоактивность, то для защиты от них на атомных реакторах устраивают многослойные экраны из специально подобранных веществ.

Радиоактивное загрязнение среды может удерживаться на местности достаточно долго, если время жизни образовавшихся искусственных радиоизотопов достаточно велико. Кроме того, радиоактивные продукты могут разноситься ветром и водой на большие расстояния. Особую опасность представляет β - активный стронций $^{90}_{38}\text{Sr}$ ($T = 28$ лет), который, попадая в организм человека и накапливаясь в костной ткани, становится источником длительного облучения костного мозга.

II. ЗАДАЧИ

Задача 10.1

Сколько ядер из $N_0 = 10^6$ ядер радона распадается за время $t = 1$ сутки?

Решение

По закону радиоактивного распада количество нераспавшихся ядер равно $N = N_0 e^{-\lambda t}$. Следовательно, количество ядер, распавшихся за время t , составит

$$N_0 - N = N_0 - N_0 e^{-\lambda t} = N_0 (1 - e^{-\lambda t}).$$

Принимая во внимание, что постоянная распада λ связана с периодом полураспада T ,

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T},$$

а табличное значение периода полураспада радона $T = 3,82$ суток, получим

$$N_0 - N = N_0 (1 - e^{-\lambda t}) = 10^6 \left(1 - e^{-\frac{\ln 2 \cdot 1}{3,82}} \right) = 1,66 \cdot 10^5.$$

Задача 10.2

Какая часть ядер радиоактивного кобальта ${}^{58}_{27}\text{Co}$ распадается за 20 суток, если период полураспада равен 72 суткам?

Решение

Количество ядер, распавшихся за время t , составляет

$$N_0 - N = N_0 - N_0 e^{-\lambda t} = N_0 (1 - e^{-\lambda t}).$$

Тогда часть распавшихся ядер выразится как

$$\frac{N_0 - N}{N_0} = \frac{N_0 - N_0 e^{-\frac{\ln 2}{T} t}}{N_0} = \frac{N_0 \left(1 - e^{-\frac{\ln 2}{T} t} \right)}{N_0} = 1 - e^{-\frac{\ln 2}{T} t} = 1 - e^{-\frac{\ln 2}{72} \cdot 20} = 0,175.$$

Задача 10.3

Определить период полураспада радионуклида, если за 1 сутки из 10^6 ядер распадается $1,75 \cdot 10^5$ ядер.

Решение

Если за 1 сутки распалось $1,75 \cdot 10^5$ ядер, то это означает, что количество нераспавшихся ядер составляет

$$N = 10^6 - 1,75 \cdot 10^5 = 8,25 \cdot 10^5.$$

По закону радиоактивного распада количество нераспавшихся ядер связано с исходным количеством ядер $N_0 = 10^6$ выражением

$$N = N_0 e^{-\frac{\ln 2}{T} t},$$

откуда

$$\frac{N_0}{N} = e^{\frac{\ln 2}{T} t}.$$

Прологарифмируем обе части уравнения и получим

$$\frac{\ln 2}{T} t = \ln \frac{N_0}{N}.$$

Период полураспада равен

$$T = \frac{\ln 2 \cdot t}{\ln(N_0/N)} = \frac{0,693 \cdot 24 \cdot 3600}{\ln(10^6/8,25 \cdot 10^5)} = 3,11 \cdot 10^5 \text{ с.}$$

Задача 10.4

Найти постоянную распада λ радона, если известно, что число ядер радона уменьшается за 1 сутки на 18,2 %. Определить среднее время жизни радона.

Решение

Количество распавшихся ядер по отношению к начальному количеству ядер составляет $\frac{N_0 - N}{N_0} = 0,182$. Подставим количество нераспавшихся

ядер N из закона радиоактивного распада $N = N_0 e^{-\lambda t}$.

$$\frac{N_0 - N}{N_0} = 1 - \frac{N}{N_0} = 1 - \frac{N_0 e^{-\lambda t}}{N_0} = 1 - e^{-\lambda t} = 0,182,$$

$$e^{-\lambda t} = 1 - 0,182 = 0,818, \quad -\lambda t = \ln 0,818,$$

откуда постоянная распада равна

$$\lambda = -\frac{\ln 0,818}{24 \cdot 3600} = 2,33 \cdot 10^{-6} \text{ с}^{-1}.$$

Среднее время жизни τ – это период времени, за которое количество имевшихся в наличии ядер сокращается в e раз. Тогда из закона радиоактивного распада $\frac{N}{N_0} = e^{-\lambda \tau}$,

$$\frac{N_0}{N} = e^{\lambda \tau} = e.$$

Отсюда среднее время жизни

$$\tau = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{2,33 \cdot 10^{-6}} = 4,3 \cdot 10^5 \text{ с} = 119,3 \text{ часа}.$$

Задача 10.5

При определении периода полураспада T короткоживущего радиоактивного изотопа использован счетчик импульсов. За время $\Delta t = 1$ минуте в начале наблюдения ($t = 0$) было насчитано $\Delta n_1 = 250$ импульсов, а в через $t = 1$ час – $\Delta n_2 = 92$ импульса. Определить постоянную радиоактивного распада λ и период полураспада T изотопа.

Решение

Число импульсов Δn , который счетчик регистрирует за время Δt , пропорционально количеству распавшихся ядер $\Delta n = k \Delta N$.

На момент начала наблюдений имелось количество ядер N_0 , через время $\Delta t = 1$ минуте было $N_{\Delta t}$ нераспавшихся ядер. Следовательно, за время $\Delta t = 1$ минуте количество распавшихся ядер составило

$$\Delta N_1 = N_0 - N_{\Delta t} = N_0 - N_0 e^{-\lambda \Delta t} = N_0 (1 - e^{-\lambda \Delta t}),$$

а количество зарегистрированных импульсов равно

$$\Delta n_1 = k N_0 (1 - e^{-\lambda \Delta t}).$$

При повторном измерении (через $t = 1$ час) начальное число ядер составляло N_t , через $\Delta t = 1$ мин осталось $N_{t+\Delta t}$ нераспавшихся ядер. Следовательно, за 1 минуту распалось количество ядер

$$\Delta N_2 = N_t - N_{t+\Delta t} = N_t - N_t e^{-\lambda \Delta t} = N_t (1 - e^{-\lambda \Delta t}),$$

а число зарегистрированных импульсов

$$\Delta n_2 = k \Delta N_2 = k N_t (1 - e^{-\lambda \Delta t}),$$

при этом N_t и N_0 связаны друг с другом соотношением закона радиоактивного распада:

$$N_t = N_0 e^{-\lambda t}.$$

Найдем отношения зарегистрированных импульсов за одинаковые интервалы времени, равные одной минуте

$$\frac{\Delta n_1}{\Delta n_2} = \frac{k N_0 (1 - e^{-\lambda \Delta t})}{k N_t (1 - e^{-\lambda \Delta t})} = \frac{N_0}{N_t} = \frac{N_0}{N_0 e^{-\lambda t}} = e^{\lambda t}.$$

Прологарифмируем это выражение и подставим численные данные

$$\lambda t = \ln \frac{\Delta n_1}{\Delta n_2},$$

$$\lambda = \frac{\ln(\Delta n_1 / \Delta n_2)}{t} = \frac{\ln(250/92)}{3600} = 2,78 \cdot 10^{-4} \text{ с}^{-1}.$$

Период полураспада равен

$$T = \frac{\ln 2}{2,78 \cdot 10^{-4}} = 2,5 \cdot 10^3 \text{ с} = 41,6 \text{ мин} = 0,693 \text{ час}.$$

Задача 10.6

Определите возраст минерала в годах, если в нем на один атом урана ${}^{238}_{92}\text{U}$ приходится один атом свинца. Считать, что в момент образования минерала, свинец в минерале отсутствовал. Свинец образовался только в результате радиоактивного распада урана. Период полураспада урана ${}^{238}_{92}\text{U}$ равен $4,5 \cdot 10^9$ лет.

Решение

Преобразуем закон радиоактивного распада $N = N_0 e^{-\lambda t}$ к виду

$$e^{-\lambda t} = \frac{N}{N_0},$$

откуда после логарифмирования выразим время t :

$$t = \frac{\ln(N_0/N)}{\lambda} = \frac{\ln(N_0/N)}{\ln 2} \cdot T.$$

Если на один атом урана приходится один атом свинца, а по условию задачи в момент образования минерала свинец отсутствовал, это означает, что в образце равные количества свинца и урана. Иными словами, половина ядер имевшегося урана превратилась в процессе радиоактивного распада в свинец. Можно сразу сделать вывод, что прошло время равное периоду полураспада, поскольку по определению это тот период времени, в течение которого распадается половина имеющегося в наличии вещества.

К тому же самому результату можно прийти путем вычислений, положив $N = \frac{N_0}{2}$. Тогда

$$t = \frac{\ln(N_0/N)}{\ln 2} \cdot T = \frac{\ln(2N/N)}{\ln 2} \cdot T = T = 4,5 \cdot 10^9 \text{ лет.}$$

Задача 10.7

В ампулу помещен радон, активность которого $A_0 = 14,8 \cdot 10^9$ Бк. Через какое время t после заполнения ампулы активность радона будет равна $A = 2,22 \cdot 10^9$ Бк? Период полураспада радона $T = 3,82$ суток.

Решение

Отношение активностей по условию задачи $\frac{A_0}{A} = \frac{14,8 \cdot 10^9}{2,22 \cdot 10^9} = 6,67$.

Поскольку активность радиоактивного препарата $A = \lambda N$, то

$$\frac{A_0}{A} = \frac{\lambda N_0}{\lambda N} = \frac{N_0}{N_0 e^{-\lambda t}} = e^{\lambda t}.$$

Тогда

$$e^{\lambda t} = 6,67,$$

откуда искомое время

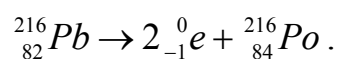
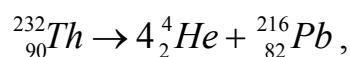
$$t = \frac{\ln 6,67}{\lambda} = \frac{\ln 6,67}{\ln 2} \cdot T = \frac{\ln 6,67 \cdot 3,82}{\ln 2} = 10,45 \text{ суток.}$$

Задача 10.8

В какой элемент превращается ${}_{90}^{232}\text{Th}$ после четырех α - и двух β^- -распадов?

Решение

Запишем уравнения процессов радиоактивных превращений:



Результатом указанных превращений является полоний.

III. КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

К10.1. За время t_1 начальное количество некоторого радиоактивного изотопа уменьшилось в 3 раза. Во сколько раз оно уменьшится за время $t_2 = 2t_1$? [в 9 раз]

К10.2. За какое время распадается $\frac{1}{4}$ начального количества ядер радиоактивного препарата, если его период полураспада $T = 24$ часа? [$t = 9,96$ часа]

К10.3. Период полураспада радиоактивного нуклида составляет 1 час. Определить среднюю продолжительность жизни этого нуклида. [$\tau = 1,33$ часа]

К10.4. Определить возраст древесины, если известно, что активность образца по изотопу $^{14}_6C$ в три раза меньше активности свежей древесины. Период полураспада $^{14}_6C$ принять равным $T = 5730$ лет. [$t = 9084$ лет]

К10.5. За один год начальное количество радиоактивного изотопа уменьшилось в 4 раза. Во сколько раз оно уменьшится за 5 лет?

К10.6. Какой изотоп образуется из $^{238}_{92}U$ после трех α - распадов и двух β - распадов?

К10.7. Какой изотоп образуется из $^{239}_{92}U$ после двух β - распадов и одного α - распада?

К10.8. Какой изотоп образуется из 8_3Li после одного β - распада и одного α - распада?

К10.9. Какой изотоп образуется из $^{133}_{51}Sb$ после четырех β - распадов?

К10.10. Какой изотоп образуется из $^{232}_{90}Th$ четырех α - распадов и двух β - распадов?

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Савельев И. В. Курс общей физики. Т. 2. Электричество. Колебания и волны. Волновая оптика / И. В. Савельев. – М. : Наука, 1989. – 496 с.
2. Савельев И. В. Курс физики. Т. 3. Квантовая оптика. Атомная физика. Физика твердого тела. Физика атомного ядра и элементарных частиц. / Савельев И. В. – М. : Наука, 1989. – 301 с.
3. Савельев И. В. Сборник вопросов и задач по физике / Савельев И. В. – М. : Наука. 1988. – 288 с.
4. Иродов И. Е. Квантовая физика. Основные законы / Иродов И. Е. – М; СПб: Физматлит: физика Лаборатория базовых знаний, 2001. – 272 с.
5. Иродов И. Е. Атомная и ядерная физика. Сборник задач. / Иродов И. Е. – СПб. : Лань, 2002. – 287 с.
6. Иродов И. Е. Задачи по общей физике / Иродов И. Е. – М.: НТИЦ «Владис», 1997. – 448 с.
7. Волькенштейн В. С. Сборник задач по общему курсу физики: учеб. пособ. для вузов / Волькенштейн В. С. – М.: Физматлит, 1990. – 400 с.
8. Чертов А. Г. Задачник по физике / А. Г. Чертов, А. А. Воробьев. – М. : Высшая школа, 1981. – 496 с.
9. Фирганг Е. В. Руководство к решению задач по курсу общей физики / Е. В. Фирганг. – М. : Высшая школа, 1978. – 351 с.
10. Serway R. Modern Physics / Raymond A. Serway, Clement J. Moses, Curt A. Moyer. – USA. Thomson, Books/Cole, 2005. – 682 p.
11. Serway R. Essentials College Physics / Raymond A. Serway, Chris Vuille/ – USA. : Thomson, Books/Cole, 2007. – 885 p.
12. Giancoli D. Physics for scientists and Engineers with Modern Physics / Douglas C. Giancoli. – USA. : Pearsons, 2008. – 1322 p.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Таблица 1 – Показатели преломления некоторых веществ

<i>Вещество</i>	<i>Показатель преломления</i>	<i>Вещество</i>	<i>Показатель преломления</i>
Вакуум	1 (точное значение)	Кедровое масло	1,52
Гелий	1,000036	Кварц	1,544
Воздух	1,0002926	Слюда	1,56–1,60
Углекислый газ	1,00045	Полиэтилен	1,5750
Лед	1,31	Стекло	1,485–1,925
Вода (20°C)	1,332986	Топаз	1,63
Ацетон	1,36	Сероуглерод	1,63
Спирт этиловый	1,36	Рубин	1,76
Тефлон	1,35–1,38	Фианит	2,15–2,16
Масло оливковое	1,46	Алмаз	2,419
Бензол	1,500	Киноварь	3,02
Органическое стекло	1,51	Арсенид галия	3,927
Каменная соль	1,516	Кремний	4,01

Таблица 2 – Длины волн и частоты видимого спектра

<i>Цвет</i>	<i>Длина волны, нм</i>	<i>Частота, тераГерц</i>
Красный	780–620	384–483
Оранжевый	620–590	483–508
Желтый	590–565	508–530
Зеленый	565–500	530–600
Голубой	500–485	600–618
Синий	485–440	618–681
Фиолетовый	440–380	681–789

Таблица 3 – Работа выхода электронов из металла

<i>Металл</i>	<i>$A_{\text{вых}}$, эВ</i>	<i>Металл</i>	<i>$A_{\text{вых}}$, эВ</i>	<i>Металл</i>	<i>$A_{\text{вых}}$, эВ</i>
Алюминий	4,25	Медь	4,40	Ртуть	4,52
Барий	2,49	Никель	4,50	Серебро	4,30
Вольфрам	4,54	Олово	4,38	Цезий	1,81

Таблица 4 – Физические постоянные

Скорость света в вакууме	$c = 2,998 \cdot 10^8 \text{ м/с} = \approx 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$
Постоянная Планка	$h = 2\pi\hbar = 6,62 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$ $\hbar = h/2\pi = 1,055 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$
Постоянная Стефана-Больцмана	$\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К}^4)$
Постоянная Вина	$b = 2,898 \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot \text{К}$
Постоянная	$C = 1,3 \cdot 10^{-5} \text{ Вт}/(\text{м}^3 \cdot \text{К}^5)$
Комптоновская длина волны электрона	$\lambda_c = h/m_0c = 2,43 \cdot 10^{-12} \text{ м} = 2,43 \text{ пм}$
Постоянная Ридберга для длин волн	$R = 1,1 \cdot 10^7 \text{ м}^{-1}$
Постоянная Ридберга для частот	$R' = 2,07 \cdot 10^{16} \text{ с}^{-1}$
Энергия ионизации атома водорода	$\varepsilon_i = hcR = 13,6 \text{ эВ} = 2,185 \cdot 10^{-18} \text{ Дж}$
Масса покоя электрона	$m_{0e} = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ кг}$
Масса покоя протона	$m_{0p} = 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$
Масса покоя α - частицы	$m_{0\alpha} = 6,64 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$
Элементарный заряд (электрон, протон)	$e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$
Заряд α - частицы	$q_\alpha = 2e = 3,2 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$
Электрическая постоянная	$\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}$ $1/4\pi\varepsilon_0 = 9 \cdot 10^9 \text{ м} / \text{Ф}$
1 электрон-Вольт	$1\text{эВ} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}$
Энергия покоя электрона	$\varepsilon_{0e} = m_{0e}c^2 = 8,187 \cdot 10^{-14} \text{ Дж} =$ $= 5,12 \cdot 10^5 \text{ эВ} = 0,512 \text{ МэВ}$
Энергия покоя протона	$\varepsilon_{0p} = m_{0p}c^2 = 1,49 \cdot 10^{-10} \text{ Дж} =$ $= 9,315 \cdot 10^8 \text{ эВ} = 0,93 \text{ ГэВ}$
Энергия покоя α - частицы	$\varepsilon_{0\alpha} = m_{0\alpha}c^2 = 5,97 \cdot 10^{-10} \text{ Дж} =$ $= 3,72 \cdot 10^9 \text{ эВ} = 3,72 \text{ ГэВ}$
	$m_{0e}c = 2,73 \cdot 10^{-22} \text{ кг} \cdot \text{м/с}$ $(m_{0e}c)^2 = 7,46 \cdot 10^{-44} \text{ кг}^2 \cdot \text{м}^2/\text{с}^2$
	$hc = 1,986 \cdot 10^{-25} \text{ Дж} \cdot \text{м}$
	$(hc)^2 = 3,95 \cdot 10^{-50} (\text{Дж} \cdot \text{м})^2$

Таблица 5 – Приставки Международной системы единиц (СИ)

<i>Кратность</i>	<i>Приставка</i>		<i>Обозначение</i>	
	<i>русская</i>	<i>международная</i>	<i>русское</i>	<i>международное</i>
10^1	дека	deca	да	da
10^2	гекто	hecto	г	h
10^3	кило	kilo	к	k
10^6	мега	mega	М	M
10^9	гига	giga	Г	G
10^{12}	тера	tera	Т	T
10^{15}	пета	peta	П	P
10^{18}	экса	exa	Е	E
10^{21}	зета	zetta	З	Z
10^{24}	йота	yotta	Й	Y
<i>Частица</i>				
10^{-1}	деци	deci	д	da
10^{-2}	санти	centi	с	h
10^{-3}	мили	milli	м	k
10^{-6}	микро	micro	мк	M
10^{-9}	нано	nano	н	G
10^{-12}	пико	pico	п	T
10^{-15}	фемто	femto	ф	P
10^{-18}	ато	atto	а	E
10^{-21}	zepto	zepto	з	Z
10^{-24}	йокто	yocto	й	y

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ	3
ОПТИКА	4
Глава 1. Геометрическая оптика	5
I. Теоретическая часть	5
II. Задачи	20
III. Контрольные задачи.....	43
Глава 2. Волновая оптика. Интерференция света	45
I. Теоретическая часть	45
II. Задачи	62
III. Контрольные задачи	77
Глава 3. Волновая оптика. Дифракция света	79
I. Теоретическая часть	79
II. Задачи	90
III. Контрольные задачи	108
Глава 4. Волновая оптика. Поляризация света	110
I. Теоретическая часть	110
II. Задачи	126
III. Контрольные задачи	139
Глава 5. Элементы специальной теории относительности	141
I. Теоретическая часть	141
II. Задачи	148
III. Контрольные задачи	156
Глава 6. Квантовая оптика. Тепловое излучение	157
I. Теоретическая часть	157
II. Задачи	165
III. Контрольные задачи	172
Глава 7. Квантовая оптика. Фотоны	173
I. Теоретическая часть	173
II. Задачи	186
III. Контрольные задачи	211

ОСНОВЫ АТОМНОЙ И ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ	213
Глава 8. Боровская теория строения атома водорода	
и водородоподобных ионов	213
I. Теоретическая часть	213
II. Задачи	224
III. Контрольные задачи	235
Глава 9. Элементы квантовой механики	237
I. Теоретическая часть	237
II. Задачи	256
III. Контрольные задачи	264
Глава 10. Элементы ядерной физики. Радиоактивность	265
I. Теоретическая часть	265
II. Задачи	287
III. Контрольные задачи	293
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	294
ПРИЛОЖЕНИЯ	295

Навчальне видання

ЛЮБЧЕНКО Олена Анатоліївна
ВЕТЧИНКІНА Зоя Костянтинівна
ТАВРІНА Тетяна Володимирівна

**ОПТИКА.
АТОМНА ТА ЯДЕРНА ФІЗИКА**

Навчально-методичний посібник
з курсу «Загальна фізика»
для студентів усіх спеціальностей и усіх форм навчання

Російською мовою

Роботу до видання рекомендувала доц. *С. Д. Гапченко*

В авторській редакції

План 2015 р., поз. 196

Підп. до друку __.__.__. Формат 60×84 1/16. Папір офсетний
Riso-друк. Гарнітура Times New Roman. Ум. друк. арк. ____.
Наклад ____ прим. Зам № _____. Ціна договірна.

Видавничий центр НТУ „ХП”.
Свідоцтво про державну реєстрацію ДК № 3657 від 24.12.2009 р.
61002, Харків, вул. Фрунзе, 21